Muhammad Minan Chusni, M.Pd.Si.

Aplikasi Kalkulus – Integral dalam Fisika

PGS

Muhammad Minan Chusni, M.Pd.Si.

Aplikasi Kalkulus-Integral dalam Fisika

Aplikasi Kalkulus-Integral dalam Fisika
Penulis: Muhammad Minan Chusni, M.Pd.Si

ISBN: 978-602-52919-3-7

Editor : Nokman Riyanto
Tata Bahasa : Tim PGS
Tata Letak : TIM PGS
Sampul : Wahyu Aji Prayoga

Penerbit
CV. Pelita Gemilang Sejahtera (PGS)
Linggasari RT 1 RW 3
Wanadadi Banjarnegara Jawa Tengah
08562871824
E-mail: pelitagemilangsejahtera@gmail.com

Cetakan 1, September 2018
Banjarnegara, CV. Pelita Gemilang Sejahtera, 2018
vi + 95; 14 x 21 cm

Kata Pengantar

Kalkulus merupakan mata kuliah wajib tingkat pertama bagi mahasiswa pendidikan fisika UIN Sunan Gunung Djati Bandung. Dikarenakan perubahan kurikulum yang menyesuaikan KKNI dan sebaran mata kuliah maka mata kuliah ini sejak 2016 memiliki bobot 3 sks yang terdiri atas materi diferensial dan integral. Mata kuliah ini memiliki tujuan agar mahasiswa menguasai konsep-konsep dasar diferensial dan integral sehingga dapat digunakan untuk menganalis, mensistesis materi fisika.

Penyusunan buku ajar ini bertujuan untuk mengefektifkan proses pembelajaran di kelas maupun di luar kelas. Pada proses pembelajaran di dalam kelas, biasanya dosen menjelaskan perkuliahan sambil mencatat dan mengerjakan latihan soal. Melalui buku ajar ini diharapkan proses pembelajaran dapat lebih optimal, yaitu dapat menjadi suplemen tamabahan bagi mahasiswa pada khususnya karena langsung disertai aplikasinya dalam kasus fisika.

Materi yang disajikan dari buku ajar ini hanya fokus tentang materi Integral karena dirasakan oleh sebagaian besar mahasiswa adalah materi yang sulit. Maka perlu diberikan suplemen dalam bentuk buku ajar yang membahas lebih rinci tentang Integral tentu, Aplikasi Integral dalam bidang Fisika, hingga membahas persamaan diferensial yang terkait dengan persaman-persaman fisis dalam fisika.

Besar harapan melalui buku ajar ini dapat memberikan manfaat untuk mempermudah mahasiswa dalam belajar. Apabila terdapat kekurangan dan kesalahan dalam penyusunan buku ajar ini, penulis akan sangat senang hati untuk merevisinya. Terimakasih.

Yogyakarta, September 2018

M. Minan Chusni

Daftar Isi

Bagian 1
Integral Tentu

George Friedrich Benhard Rieman (1826-1866) yang memberikan definisi modern berkaitan dengan perumusan definisi ini, lebih real membahas tentang gagasan jumlah Rieman.

Jumlah Riemaan misalkan sebuah fungsi f didefinisikan pada interval tertutup $[a,b]$. Fungsi ini bisa bernilai positif pada interval tersebut dan bahkan tidak perlu kontinu. Misalkan suatu partisipasi P membagi interval $[a,b]$ menjadi n interval-bagian (tidak perlu sama panjang) dengan menggunakan tiki-titik $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{0-1} < x_{n=b}$ dan misalkan $\Delta x_1 = x_i - x_{i-1}$. Pada tiap integral-bagian $[x_{i-1} - x_i]$, ambil sebuah titik sembarang $\overline{x_i}$ (yang mungkin saja sebuah titik ujung); kita sebut itu sebagai titik sampel untuk interval-bagian ke $-\, i$.

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta x_i$$

Jumlah Riemann untuk f yang berpadanan terhadap partisi P. Jumlah Rieman ditafsirkan sebagai sebuah jumlah aljabar luas.

$$\sum_{i=1}^{6} f(\overline{x_i})\Delta x_i = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6$$

Contoh Soal

Hitunglah jumlah Riemann untuk $f(x) = x^2 + 1$ pada interval $[-1,2]$ dengan menggunaklan titik-titik partisi berjarak sama $-1 < -0{,}5 < 0 < 0{,}5 < 1 < 1{,}5 < 2,$ dengan titik sampel $f(\overline{x}_i)$ berupa titik tengah dari interval-bagian ke$-i.$

Penyelesaian:

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x_i$$
$$= [f(-0{,}75) + f(-0{,}25) + f(0{,}25) + f(0{,}75) + f(1{,}25) + f(1{,}75)](0{,}5)$$
$$= [1{,}5625 + 1{,}0625 + 1{,}0625 + 1{,}5625 + 2{,}5625 + 4{,}0625](0{,}5)$$
$$= 5{,}9375$$

1. **Definisi Integral Tentu**

Misalkan f suatu fungsi yang di definisikan pada interval tertutup $[a,b]$. Jika $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x_i$ **Ada**, kita katakan f adalah terintegrasikan pada $[a,b]$. Lebih lanjut $\int_a^b f(x)dx,$ disebut intergral tentu (atau integral Riemann) f dari a ke $b,$ kemudian diberikan oleh

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\|\to n} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x_i$$

Secara umum, $\int_a^b f(x)dx$ menyatakan bahwa luas bertanda daerah yang terkurung di antara kurva $y = f(x)$ dan sumbu $-x$ dalam interval $[a,b]$, yangbberarti bahwa tanda positif dikaitkan untuk luas bagian-bagian uyang berada di atas sumbu$-x$ dan negatif dikaitkan untuk luas bagian-bagian yang berada di bawah sumbu$-x$ dalam lambang $\int_a^b f(x)dx = A_{atas} - A_{bawah}$.

Maka kaitkanlah limit dengan definisi tentang integral tentu lebih umum ketimbang penggunana sebelumnya dan oleh karenanya perlu dijelaskan. Identitas $\lim_{\|P\|\to n} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i = L$

Berarti bahwa, berpadanan terhadap setiap $\varepsilon > 0$ terhadap suatu $\delta > 0$ sedemikian rupa sehingga

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i - L \right| < \varepsilon$$

Untuk semua jumlah Riemann $\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$ untuk f pada $[a,b]$ yang memenuhi norma $\|P\|$ partisi yang berhubungan adalah lebih kecil dari δ dalam kasusus ini, kita katakana bahwa limit yang di tunjukan itu ada dan bernilai L.

Dalam definisi $\int_a^b f(x)dx$, kita secara implisit mengasumsikan bahwa $a < b$. kita hilangkan batasan itu dengan definisi-definisi berikut.

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx, a > b$$

Jadi,

$$\int_2^2 x^3 dx = 0, \qquad \int_6^2 x^3 dx = -\int_2^6 x^3 dx$$

Sifat Penambahan Interval Definisi integral tentu dipicu oleh adanya masalah luas daerah melengkung. Pandang dua daerah melengkung R_1 dan R_2. Misalkan $R = A(R_1 \cup R_2) = A(R_1) + (R_2)$, yang menyiratkan bahwa

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x) + \int_b^c f(x)dx$$

Teorema A: Sifat Penambahan Interval

Jika f terintegrasikan pada interval yang memuat titik $a, b,$ dan $c,$ maka

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Tidak peduli apapun urutan $a, b,$ dan $c.$

2. Kecepatan dan Posisi

Kecepatan adalah sama dengan jarak tempuh, asalkan fungsi kecepatan $v(t)$ positif. Umumnya, posisi (yang mungkin positif atau negatif) adalah sam dengan integral tentu dari fungsi kecepatan (yang mungkin positif dan negatif). Secara lebih spesifik, jika $v(t)$ adalah kecepatan sebuah benda pada waktu $t,$ dengan $t \geq 0,$ dan jika benda berada pada posisi 0 pada waktu 0, maka posisi benda waktu a adalah

$$\int_a^b v(t)dt$$

Contoh Soal

1. Sebuah benda berada di titik-asal pada waktu $t = 0$ mempunyai kecepatan, yang diukur dalam meter per detik,

$$v(t) = \begin{cases} t/20, \text{ jika } 0 \le t \le 40 \\ 2, \text{ jika } 40 < t \le 40 \\ 5 - t20, \text{ jika } t > 60 \end{cases}$$

Nyatakan posisi benda pada $t = 140$ sebagai integral tentu dan hitung menggunakan rumus dari geometri!

Penyelesaian:

Posisi pada waktu $t = 140$ sama dengan integral tentu adalah $\int_0^{140} v(t)dt$, yang dapat dihitung menggunakan rumus-rumus untuk luas daerah suatu segitiga dan segiempat dan menggunakan Sifat Penambahan Interval (Teorema A).

$$\int_0^{140} v(t)dt = \int_0^{40} \frac{t}{20} dt + \int_{40}^{60} 2dt + \int_{60}^{140} \left(5 - \frac{t}{20}\right) dt$$
$$= 40 + 40 + 40 - 40 = 80$$

Teorema jika $f(x)$ adalah terbatas dalam $[a,b]$, maka syarat perlu dan syarat cukup bagi keberadaan $\int_a^b f(x)dx$ adalah bahwa himpunan diskontinuitas dari $f(x)$ memiliki ukuran nol (Murray R. & Spiegel P.,1983).

3. Sifat-Sifat Integral Tentu

Jika $f(x)$ dan $g(x)$ dapat diintegrasikan dalam $[a,b]$ maka:

a. $\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

b. $\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx$ di mana A adalah sebarang konstanta

c. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)$ dengan syarat $f(x)$ dapat diintegrasi dalam $[a,c]$ dan $[c,b]$

d. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

e. $\int_a^a f(x)dx = 0$

f. Jika dalam $a \le x \le b, m \le f(x) \le M$ dimana m dan M adalah konstanta-konstanta, maka $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

g. Jika dalam $a \le x \le b, f(x) \le g(x)$ maka $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

h. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$ jika $a < b$

4. Teorema Dasar Kalkulus

Kalkulus adalah studi tentang limit, dan dua limit terpenting asalah turunan dari integral tentu. Turunan fungsi f adalah

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Dan integral tentu adalah

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

Teorema dasar aritmatika mengatakan bahwa suatu bilangan bulat difaktorkan sebagai hasil kali dari bilangan-bilangan prima.

Teorema dasar aljabar mengatakan bahwa suatu polynomial berderajat n tepat mempunyai n akar, termasuk akar bilangan kompleks dan bilangan yang berulang.

Pada Sub Teorema ini dimana membahasa masalah kecepatan benda pada waktu t diberikan oleh $v = f(t) = \frac{1}{4}t^3 + 1.$ Bahwa jarak yang di tempuh sejak waktu $t = 0$ sampai waktu $t = 3$ sama dengan

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t = \frac{129}{16}$$

Dengan menggunakan istilah dari integral tentu bahwa jarak yang ditempuh sejak waktu $t = 0$ sampai waktu $t = 3$ sama dengan integral tentu.

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t = \int_0^3 f(t)dt$$

Karena kecepatan adala positif untuk $t \geq 0$ jarak yang ditempuh selama waktu t sama dengan posisi benda pada waktu t. Jika kecepatan negative untuk suatu nilai t, maka benda akan bergerak mundur pada waktu t dalam kasus demikian, jarak jarak ya ng ditempuh akan tidak sama dengan posisi. Dengan menggunakan penalaran yang sama untuk menjari bahawa jarak s yang ditempuh sejak waktu $t = 0$ samapi waktu $t = x$ adalah

$$s(x) = \int_0^x f(t)dt$$

Turunan dari jarak yang ditempuh selama kecepatan selalu positif adalah kecepatan, mempunyai

$$s'(x) = v = f(x)$$

dalam istilah lain

$$\frac{d}{dx} s(x) = \frac{d}{dx} \int_0^4 f(t)dt = f(x)$$

Definisi $A(x)$ berupa luas di bawah grafik $y = \frac{1}{3}t + \frac{2}{3}$, di atas sumbu $-t$, di antara garis tegak $t = 1$ dan $t = x$, dengan $x \geq 1$.

Fungsi seperti ini disebut fungsi akumulasi karena bisa mengakumulasikan kuas di bawah kurva mulai dari suatu nilai tetap (dalam kasus ini $t = 1$ sampai suatu nilai variable (dalam kasus ini $t = x$.

Luas $A(x)$ sama dengan integral tentu

$$A(x) = \int_1^x \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}t \right) dt$$

Dalam kasus ini kita dapat menghitung integral tentu ini dengan menggunakan argumentasi geometri $A(x)$, menjadi

$$A(x) = (x-1)\frac{1 + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3t}x \right)}{2} = \frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{5}{6}$$

Dengan ini terselesaikan, bahwa turunan A adalah

$$A'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{5}{6} \right) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

Dengan lain

$$\frac{d}{dx}\int_1^x \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}t \right) dt = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x$$

Marilah kita definisikan fungsi akumulasi lain sebagai luas dimana $y = t^2$ terhadap sumbu $-t$, di kanan titik-asal, dan di kiri garis $t = x$, dengan $x \geq 0$. luas ini diberikan oleh integral tentu $\int_0^x t^2 dt$.

Untuk mencari luas ini, pertama kita bangun jumlah Riemann. Kita gunakan partisi dari $[0, x]$ dan menghitung fungsi dari titik ujung kanan masing-masing interval-bagian. Maka $\Delta t = x/n$ dan titik ujung kanan interval ke$-i$ adalah $t_i = 0 + i\Delta t = ix/n$ Karena itu jumlah Riemann adalah

$$\sum_{i=1}^{n} (t_i)\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{ix}{n}\right)\frac{x}{n}$$

$$= \frac{x}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{ix}{n}\right)^2$$

$$= \frac{x^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \frac{x^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Integral tentu adalah limit jumlah Riemann ini.

$$\int_0^x t^2 dt = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{x^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{x^3}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{n^3}$$

$$= \frac{x^3}{6}\cdot 2 = \frac{x^3}{3}$$

Jadi, $B(x) = x^3/3$, sehingga turunan B adalah

$$B'(x) = \frac{d}{dx}\frac{x^3}{3} = x^2$$

Dengan lain

$$\frac{d}{dx}\int_0^x t^2 dt = x^2$$

Jadi, pada hasil tersebut dapat disiratkan bahwa turunan fungsi kumulasi sama dengan fungsi yang sedang diakumulasi.

Teorema dasar kalkulus pertama, disebut dasar karena teorema ini menghubungkan turuna dan integral tentu.

Teorema A Teorema Dasar Kalkulus Pertama

Misalkan f kontinu pada interval tertutup $[a,b]$ dan misalkan x sebarang titik (variabel) dalam (a,b). Maka

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = f(x)$$

BUKTI Untuk x dalam $[a,b]$, didefinisikan $F(x) = \int_0^x f(t)dt.$ Maka untuk x dalam (a,b)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt &= F'(x)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right]\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt\end{aligned}$$

Baris terakhir menyusul dari Sifat Penambahan Interval. Ketika h kecil, f tidak berubah banyak pada interval $[x, x+h]$. Secara kasar f sama dengan $f(x)$, nilai f terhitung. Luas daerah pada $y = f(t)$ mulai dari x sampai $x+h$ adalah secara aproksimasi sama dengan luas segirmpat dengan lebar h dan tinggi $f(x)$; yakni $\int_x^{x+h} f(t)dt \approx hf(x).$ Karena itu,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt \approx \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[hf(x)] = f(x)$$

SIFAT PEMBANDING Peninjauan luas daerah-daerah R_1 dan R_2

Teorema B Sifat Pembanding

Jika f dan g terintegrasikan pada $[a,b]$ dan jika $f(x) \leq g(x)$ untuk semua x dalam $[a,b]$, maka

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Dalam Bahasa tak-resmi tetapi deskriptif, kita katakan bahwa integral tentu mempertahankan pertidaksamaan

BUKTI Misalkan $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ suatu partisi sebarang dari $[a,b]$, dan untuk masing masing i misalkan $\bar{x}_i$ titik sampel pada interval-bagian ke $-i$ $[x_{i-1,} x_i]$. Dapat disimpulkan bahwa secara berturut-turut bahwa

$$f(\bar{x}_i) \leq g(\bar{x}_i)$$

$$f(\bar{x}_i)\Delta x_i \leq g(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} g(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i \leq \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Teorema C Sifat Keterbatasan

Jika f terintegrasikan pada $[a,b]$ dan jika $m \leq f(x) \leq M$ untuk semua x dalam $[a,b]$, maka

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Integral Tentu Adalah Operator Linear Sebelumnya kita mempelajari bahwa $D_x, \int ...dx,$ dan $\sum$ adalah operator linear. Anda dapat menambahkan $\int_a^b ....dx$ ke daftar tersebut.

Teorema D Kelinearan Integral Tentu

Misalkan bahwa f dan g terintegrasikan pada $[a,b]$ dan k adalah konstanta. Maka kf dan $f+g$ adalah terintegrasikan dan

$$(i) \int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx;$$

$$(ii) \int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx;$$

$$(iii) \int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

Rumus teorema dasar kalkulus pertama

$$F(x) = \int_a^b f(t)dt$$

Contoh Soal

1. Carilah $\frac{d}{dt} = \left[\int_1^x t^3 dt\right]$

   Penyelesaian:

   Menurut teorema dasar kalkulus pertama, $\frac{d}{dx} = \left[\int_1^x t^3 dt\right] = x^3$

2. Carilah $\frac{d}{dt}\int_3^x \frac{t^{3/2}}{\sqrt{t^3+17}}dt$

Penyelesaian:

Kita tantang siapapun untuk mengerjakan contoh ini dengan terlebih dahulu menghitung integralnya. Tetapi, menurut Teorema Dasar Kalkulus Pertama , soal ini sudah jelas:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^b \frac{t^{3/2}}{\sqrt{t^2+17}}dt\right] = \frac{x^{3/2}}{\sqrt{x^2+17}}$$

5. Teorema-Teorema Nilai Mean Untuk Integral

a. Teorema nilai mean pertama. Jika $f(x)$ adalah kontinu dalam $[a,b]$ maka terdapat sebuah titik ξ dalam (a,b) sedemikian rupa sehingga $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)$

b. Teorema nilai mean pertama yang digeneralisasi. Jika $f(x)$ dan $g(x)$ adalah kontinu dalam $[a,b]$ dan $g(x)$ tidak merubah tanda dalam interval, maka terdapat satu titik ξ dalam (a,b) sedemikian rupa sehingga

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

Integral mempunyai fungsi genap dan ganjil (Nugroho, D. B., 2012). Dalam fungsi ini, kita dapat menyederhanakan perhitungan integral tentu (atas suatu interval yang simetris terhadap sumbu y atau titik asal) dengan mengetahui apakah integral adalah fungsi genap atau ganjil.

6. Teorema Fungsi Genap atau Ganjil

Teorema fungsi genap dan ganjil sebagai berikut:

a. Jika f adalah suatu fungsi genap, maka $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

b. Jika f adalah suatu fungsi ganjil, maka $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

Adapun sifat-sifat perbandingan dari integral (Stewart, J., 2010):

a. Jika $f(x) \geq 0$ untuk $a \leq x \leq b,$ maka $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

b. Jika $f(x) \geq g(x)$ untuk $a \leq x \leq b,$ maka $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

c. Jika $m \leq f(x) \leq M$ untuk $a \leq x \leq b,$ maka $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

7. Teorema Nilai rata-rata

Misalkan f kontinu pada selang tertutup $[a,b]$ maka terdapat suatu bilangan c antara a dan $b,$ sedenikian sehingga

$$\int_a^b f(t)dt = f(c)(b-a)$$

Latihan Soal

A. Pilihan Ganda

1. Tentukan nilai rata-rata dari fungsi $f(x) = x^3$ pada selang tertutup $[-1,2]$…

   A. $1\frac{1}{4}$

   B. $2\frac{3}{4}$

   C. $1\frac{2}{4}$

   D. $2\frac{4}{2}$

   E. $3\frac{2}{4}$

2. Hitunglah $\int \frac{xdx}{1+x^4}$ ….

   A. $\frac{1}{2}\sec^{-1}(x^2)+c$

   B. $\frac{1}{2}\sin^{-1}(x^2)+c$

   C. $\frac{1}{2}\tan^{-1}(x^2)+c$

   D. $\frac{1}{2}\cos^{-1}(x^2)+c$

   E. $\frac{1}{2}\cot^{-1}(x^2)+c$

3. Hitunglah $\int_0^1 \left(5-3\sqrt{1-x^2}\right)dx$ …..

A. $5-\frac{5\pi}{2}$

B. $5-\frac{3\pi}{4}$

C. $5-\frac{6\pi}{4}$

D. $5-\frac{8\pi}{4}$

E. $5-\frac{\pi}{4}$

4. Hitunglah $\int_3^4 x(2+x)^3\,dx$ ….

A. $-64\frac{8}{7}$

B. $-54\frac{2}{3}$

C. $-64\frac{4}{5}$

D. $-76\frac{7}{8}$

E. $-64\frac{5}{4}$

5. Hitunglah $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x\cos x dx$.....

A. $\frac{7}{24}$

B. $\frac{8}{30}$

C. $\frac{5}{16}$

D. $\frac{1}{3}$

E. $\frac{3}{2}$

6. Hitunglah $\int_0^1 x\sqrt{x^2} + 1dx \ldots$

A. $\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$

B. $\frac{1}{4}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$

C. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - 1\right)$

D. $\frac{1}{6}\left(3\sqrt{2} - 1\right)$

E. $\frac{1}{3}\left(\sqrt{2}\right)$

7. Hitunglah $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$

A. 3
B. 5
C. 1
D. 8
E. 2

8. Hitunglah $\int_1^2 \ln x dx$

A. $2\ln 2 - 1$
B. $3\ln 2 - 3$
C. $2\ln 2 - 4$
D. $4\ln 2 - 1$
E. $5\ln 2 - 5$

9. Hitunglah $\int_{-1}^{2} (x^2 - 6x^2 + 8x + 2)dx$

A. $12\frac{1}{4}$
B. $8\frac{1}{4}$
C. $6\frac{3}{4}$
D. $9\frac{1}{4}$
E. $3\frac{3}{4}$

10. $\int_{2}^{3} 4x^3 dx$

A. 65
B. 76
C. 55
D. 45
E. 66

B. Esai

1. Sebuah benda berada di titik-asal pada waktu $t = 0$ mempunyai kecepatan, yang diukur dalam meter per detik,

$$v(t) = \begin{cases} t/2 & \text{jika } 0 \le t \le 2 \\ t & \text{jika } 2 < t \le 4 \end{cases}$$

Nyatakan posisi benda pada $t = 3$ sekon sebagai integral tentu dan hitung menggunakan rumus dari geometri!

2. Hitunglah integral menggunakan fungsi genap dan ganjil

$$\int_{-2}^{2} x(x^2 + 1)^3\, dx$$

3. Andaikan bahwa

$$\int_{0}^{1} f(x)dx = 3$$

Cari $\int_{-1}^{0} f(x)dx$, Jika :

(a) $f(x)$ adalah fungsi genap dan (b) $f(x)$ adalah fungsi ganjil

4. Hitunglah integral menggunakan fungsi genap dan ganjil

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \sin(x)^2 \cos(x)dx$$

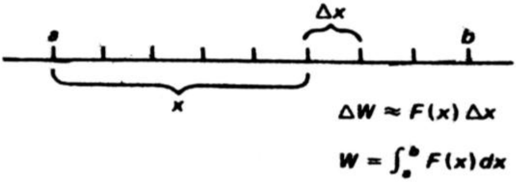
Bagian 2
Usaha

A fundamental concept in classical physics is work: If an object is moved in a straight line against a force F for a distance s the work done is $W = Fs$ (Bourne, 2016).

Dalam fisika kita tahu bahwa apabila suatu benda bergerak sepanjang suatu garis *(s)*, sedangkan gaya *(F)* yang konstan yang menggerakan benda dengan arah yang sama dengan arah gerak benda tersebut maka usaha *(W)* yang dilakukan oleh gaya tersebut

$$W = F \cdot s$$

Pada umumnya gaya itu tidak konstan. Andaikan benda digerakkan sepanjang sumbu x dari titik x=a ke titik x=b. Andaikan gaya yang menggerakkan benda yang berada di x adalah $F(x)$ dengan F sebuah fungsi kontinu. Berapakah kerja yang dilakukan oleh gaya itu? Untuk memecahkan persoalan ini, kita menggunakan metode potong-potong, aproksimasi, integralkan. Dalam hal ini, kita harus mengartikan potong-potong sebagai selang [a,b] menjadi selang-selang bagian, *aproksimasi* disini berarti bahwa pada selang [x,x+Δx]; gaya adalah kosntan dengan nilai $F(x)$ sehingga kerja yang dilakukan adalah $F(x)\Delta x$, **integralkan** berarti jumlahkan semua kerja pada masing-masing Δx dan kemudian ditarik limitnya dengan membuat Δx menuju nol.



Dengan demikian dapatlah kita simpulkan kerja yang dilakukan untuk menggerakkan benda dari *a* ke *b* adalah

$$W = \int_a^b F(x)dx$$

Contoh Soal

Seseorang mendorong mobil dengan gaya konstan sebesar 200 N sejauh 30 meter maka kerja yang dilakukan adalah 200×30=6000 N/m.

Di dalam praktek umumnya gaya itu tidak konstan. Andaikan benda digerakan sepanjang sumbu x dari titik $x = a$ ke titik $x = b$ andaikan gaya yang menggerakan benda yang berada di *x* adalah $F(x)$ dengan *F* sebuah fungsi yang Kontinu. Berapa gaya yang di lakukan oleh gaya itu? untuk memecahkan persoalan ini menggunakan lagi potong potong, aproksimasi , integralkan sehingga menghasilkan (Purcell & Varberg, 1998):

$$W = \int_a^b F(x)dx$$

Sekarang kita tinjau total kerja, yaitu kerja yang dilakukan oleh semua gaya yang bekerja pada benda lebih dari 1 dimensi, dan kita jumlahkan menurut komponen-komponen produk skalarnya:

$$W = \int_a^b \overline{F} \cdot ds = \int_a^b (\overline{F}_x \cdot dx + \overline{F}_y \cdot dy + \overline{F}_z \cdot dz)$$

1. Aplikasi Pada Pegas

Dengan menggunakan hukum Hooke yang berlaku dalam fisika, gaya $F(x)$ yang diperlukan untuk menarik atau menekan pegas sejauh x satuan dari keadaan asal adalah:

$$F(x) = kx$$

Besar gaya tarik atau gaya tekan yang diberikan keada pegas berbanding lurus dengan pertambahan panjang. Usaha yang dilakukan oleh gaya pegas ketika benda berpindah dari posisi (1) dengan simpangan x_1 ke posisi (2) dengan simpangan x_2 karena gaya F berlawanan dengan perpindahan Δx maka:

$$W_{12} = -F\Delta x = -kx\Delta x$$

Dengan menggunakan integral maka:

$$W_{12} = \int_{x1}^{x2} -kxdx = -k\int_{x1}^{x2} xdx = -k\left.\frac{x^2}{2}\right|_{x_1}^{x_2}$$

$$= -\frac{1}{2}k({x_2}^2 - {x_1}^2)$$

Sehingga kerja yang dilakukan oleh pegas adalah:

$$W = -\frac{1}{2}k({x_2}^2 - {x_1}^2)$$

Usaha yang dilakukan oleh gaya pegas di antara dua tempat (posisi) tentu tidak bergantung pada lintasan yang ditempuh, tetapi hanya bergantung pada posisi awal (simpangan x_1 dari posisi keseimbangan) dan posisi akhir (simpangan x_2 dari posisi keseimbangan).

Contoh Soal

1. Apabila panjang alami pegas adalah 15 cm dan apabila diperlukan gaya 3 kg untuk menariknya sejauh 2 cm, tentukan kerja yang d perlukan untuk menarik pegas tersebut sejauh 20 cm, dari keadaan alami!

   Penyelesaian:

   Menurut hukum Hooke $F(x) = kx$ untuk menghitung konstanta k pada pegas khusus adalah $F(2) = 3$ maka $3 = k.2$ $k = \frac{3}{2}$

   selanjutnya

   $F(x) = \frac{3}{2}x$ apabila pegas dalam keadaan alami sepanjang 15 cm, $x = 0$ apabila panjang pegas nya 20 cm $x = 5$ sehingga kerja yang dilakuan untuk menarik pegas itu adalah

   $$W = \int_0^5 \frac{3}{2} xdk = \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{x^2}{2}\right]_0^5 = \frac{75}{4} = 18{,}75 \text{ Ncm}$$

2. Menurut hukum coloumb dua benda bermuatan listrik yang sejenis saling menolak dengan gaya yang berbanding terbalik dengan kuadrat jarak anatara benda-benda itu. Apabila gaya tolak adalah 10 dyne pada saat jarak anatara benda-benda itu adalah 2 centimeter tentukan besarnya kerja yang diperlukan untuk mendekatkan benda 5 centimeter menjadi berjarak 1 centimeter!

   Penyelesaian:

   $$F(tolak) = 10dyne$$
   $$x = 2$$
   $$F = \frac{k}{x^2}$$

   $$10 = \frac{k}{2^2}$$
   $$k = 10.4$$
   $$k = 40$$

$$F=\int_{5}^{1}-\frac{k}{x^2}=\int_{5}^{1}40x^{-2}=-\int_{1}^{5}-40x^{-2}$$

$$=-40\left[-\frac{1}{x}\right]_1^5=-40\left[-\frac{1}{5}-(-\frac{1}{1})\right]$$

$$=\frac{-40+200}{5}=32\ \text{dyne.cm}$$

2. Aplikasi Pada Pompa Cairan

Contoh Soal

Kebocoran air dari tengki 55 galon pada tingkat $V'(t)=11-1{,}1t$ dimana t diumpamakan dalam jam dan *V* dalam galon. Berapa banyak kebocoran air dari tenki antara *t* = 3 jam dan *t*= 5 jam dan berapa lama waktu yang di butuhkan samapai 5 galon?

Penyelesaian:

a. Berapa banyak kebocoran air *t* = 3 jam dan *t*= 5 jam

$$V(5)-V(3)=\int_{3}^{5}V'(t)dt=\int_{3}^{5}(11-1{,}1t)dt$$

$$=\left[11t-\frac{1{,}1t^2}{2}\right]_3^5$$

$$=\left[11(5)-\frac{1{,}1(5)^2}{2}\right]-\left[11(3)-\frac{1.1(3)^2}{2}\right]$$

$$=41{,}25-28{,}05=13{,}2galon$$

b. Lama waktu sampai 5 galon

$$V(t)-V(0)=\int_0^{t_1} V'(t)dt=\int_0^{t}(11-1{,}1t)dt$$

$$55-5=\left[11t-\frac{1{,}1t^2}{2}\right]_0^{t_1}$$

$$=50+11t_1-0{,}55t^2$$

$$0{,}55t^2-11t+50=0$$

menggunakan rumus akar-akar kuadrat

$$r_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-(-11)\pm\sqrt{-11^2-4(0{,}55)(50)}}{2(0{,}55)}$$

$$=\frac{11\pm\sqrt{121-110}}{1{,}1}$$

$$+=13{,}162\,\text{jam}$$

$$-=6{,}83\,\text{jam}\approx 7\,\text{jam}$$

Mengambil yang bernilai negatif:

$$11-1{,}1t=0$$

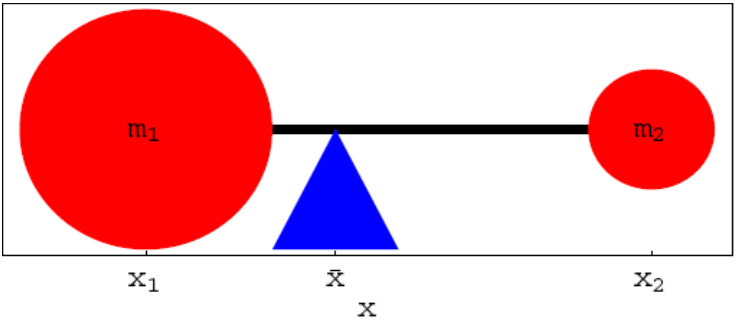
$$t=\frac{11}{1{,}1}=10\,\text{jam}$$

Jadi, memerlukan 10 jam untuk tidak ada air dalam galon dan untuk sisa 5 galon memerlukan waktu sekitar 7 jam.

3. Momen, Pusat Massa

a. Momen dan Pusat Massa

Misalkan dua massa m_1 dan m_2 melekat pada ujung yang berlawanan dari sebuah batang



Dimana kita bisa menunjang batang sehingga sistemnya seimbang? Misalkan *x* menjadi lokasi titik keseimbangan.

$$m_1(\bar{x}-x_1)=m_2(x_2-\bar{x})$$
$$\bar{x}(m_1+m_2)=x_1m_1+x_2m_2$$
$$\bar{x}=\frac{x_1m_1+x_2m_2}{m_1+m_2}$$

Total massa $m=\sum_{i=1}^{n} m_i$

Momen $M_0=\sum_{i=1}^{n} x_i m_i$

Pusat Massa $\bar{x}=\frac{M_0}{m}$

(Buchanan, 2011)

Hasil kali massa dan jarak berarah dari suatu titik tertentu dinamakan **momen** partikel (benda) terhadap titik tersebut. Momen ini mengukur kecenderungan massa yang menghasilkan suatu putaran pada titik tersebut.syarat agar supaya dua massa pada garis setimbang pada titk garis apabila jumlah momen-momen terhadap titik itu sama dengan nol.

$$M=\vec{x}\cdot m$$

$$\text{Momen}=(\text{jarak berrarah})\cdot(\text{massa})$$

Keadaan di atas untuk dua titik dapat kita perlias. Jumlah momen *M (terhadap titik asal)* suatu sistem yang terdiri atas n massa, yaitu sebesar $m_1, m_2, ...m_n$, yang berada pada $x_1, x_2, ...x_n$ sumbu x adalah jumlah momen masing-masing massa yaitu

$M = x_1 m_1 + x_2 m_2, ... + x_n m_n = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i$ syarat kesetimbangan *M=0*

bila kita terapkan untuk $\bar{x}$ maka kita peroleh $\bar{x} = \dfrac{M}{m} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$

Contoh Soal

1. Diketahui massa sebesar 4,3,6,7 pada posisi 0,1,2, dan 7 terhadap suatu sistem koordinat pada sumbu $\bar{x}$ .Tentukan titik berat sistem tersebut

   Penyelesaian:

   $$\bar{x} = \frac{(0)(4) + (1)(3) + (2)(6) + (7)(7)}{4 + 3 + 6 + 7} = \frac{64}{20} \approx 3{,}2$$

2. Tentukan massa dan pusat massa dari sebuah benda yang memiliki kerapatan $\rho(x) = \dfrac{x}{5} + 1 \; for \; 0 \le x \le 7$!

Penyelesaian:

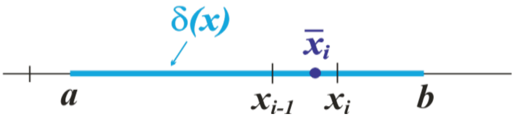
$$m=\int_0^7 (\frac{x}{5}+1)dx=\left[(\frac{x^2}{10}+x)\right]_0^7=\frac{119}{10}$$

$$M_0=\int_0^7 (\frac{x^2}{10}+x)dx=\left[\frac{x^3}{15}+\frac{x^2}{2}\right]_0^7=\frac{1421}{30}$$

$$\bar{x}=\frac{\frac{1421}{30}}{\frac{119}{10}}=\frac{203}{51}$$

b. Titik Berat Kawat/Benda Satu Dimensi

Perhatikan sepotong kawat yang diletakkan sepanjang sumbu-x pada posisi $x = a$ sampai $x = b$. Bila rapat massa benda tersebut homogen maka titik beratnya terletak ditengah-tengah kawat, $\bar{x}=\dfrac{a+b}{2}$. Sekarang akan ditinjau kasus di mana rapat massa benda tidak homogen. Misalkan rapat massanya $\delta(x)$.



Bentuk partisi $\mathrm{P}: x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b$. Perhatikan potongan kawat pada subinterval $\left[x_i - 1, x_i\right]$. Pilih titik wakil $\bar{x}_i$. Selanjutnya kita hitung aproksimasi massa dan momen potongan ini terhadap titik nol:

$\Delta m = \delta(\bar{x}_i)\Delta x_i$ dan $\Delta M = \bar{x}_i\delta(\bar{x}_i)\Delta x_i$

Dengan demikian massa, momen dan titik berat kawat adalah:

$$m=\int_a^b \delta(x)dx \quad M=\int_a^b x\delta(x)dx \text{ dan } \bar{x}=\frac{M}{m}$$

Contoh Soal

Kepadatan/rapat massa sepotong kawat $\delta(x) = 3x^2$ gr/cm . Tentukan pusat massa kawat antara $x = 2$ dan $x = 10$!

Penyelesaian:

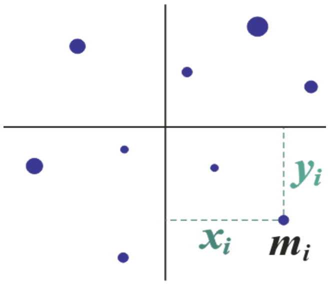
$$m = \int_2^{10} 3x^2 dx = 3\left[\frac{1}{3}x^3\right] = \left[x^3\right]_2^{10} = \left[\left(10^3 - 2^3\right)\right] = 992$$

$$M = \int_2^{10} 6x(3x^2)dx = 44926$$

$$\bar{x} = \frac{M}{m} = \frac{44926}{992} = 45{,}290$$

c. Distribusi Massa Pada Bidang

Perhatikan n buah benda dengan massa $m_1, m_2, ..., m_n$ yang terletak pada bidang koordinat. $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ...(x_n, y_n)$. Misalakan koordinat titik beratnya adalah $(\bar{x}, \bar{y})$ *(perhatikan bahwa* $\bar{x}$ *adalah jarak titik berat sumbu-y dan* $\bar{y}$ *adalah jarak titik berat sumbu-x).*



Maka koordinat titik beratnya adalah $(\bar{x}, \bar{y})$ adalah

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m}, \ \bar{y} = \frac{M_x}{m}, \text{ dengan } m = \sum_{i=1}^{n} m_i \quad \text{(massa total)}$$

$$M = \sum_{i}^{n} x_i m_i$$

Contoh Soal

Pada bidang yang memiliki sistem koordinat terdapat massa dengan lokasinya sebagai berikut :

$m_1 = 3$ di (1,1); $m_2 = 2$ di (7,1); $m_3 = 4$ di (-2,-5); $m_4 = 6$ di (-1,0); $m_5 = 2$ di (4,6).

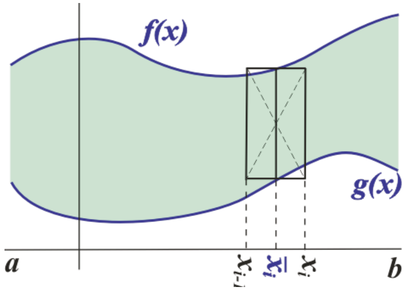
Tentukan momen dan pusat massa sitem tersebut terhadap sumbu-sumbu koordinat!

$M_x = -3 \ M_y = 11$

$$\bar{x} = \frac{(3)(1)+(2)(7)+(4)(-2)+(6)(-1)+(2)(4)}{3+2+4+6+2} = \frac{11}{17}$$

$$\bar{y} = \frac{(3)(1)+(2)(1)+(4)(-5)+(6)(0)+(2)(6)}{3+2+4+6+2} = -\frac{3}{17}$$

d. Pusat Massa Keeping Homogen



Perhatikan sebuah keeping homogen seperti pada gambar di atas. Pastiaka interval $[a,b]$ dan perhatiakan subinterval $[x_1 - 1, x_i]$. Tetapkan $\bar{x}$ titik tengah antara $x_i - 1$ dan x_i. Bentuk persegi panjang seperti pada gambar di atas. Pusat massa persegi panjang tersebut terletak pada perpotongan diagonalnya (lihat gambar). Missalkan Rapat massa keeping adalah δ (konstanta), maka:

$$\Delta m = \delta(f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i))\Delta x_i \qquad \mathrm{m} = \delta\int_a^b (f(x) - g(x)dx$$

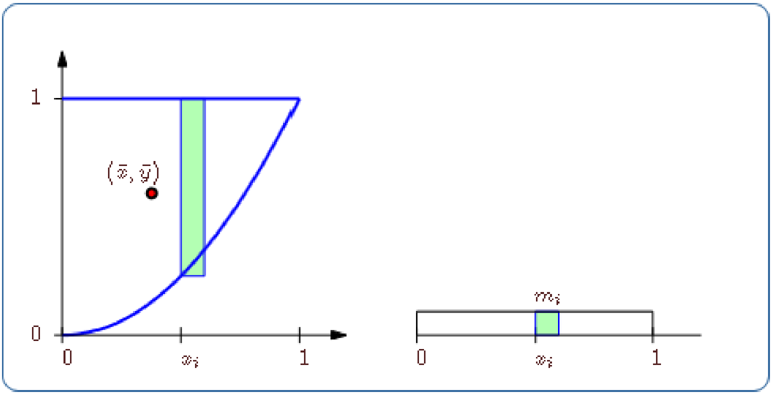
$$\Delta M_y = x\delta(f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i))\Delta x_i \qquad M_y = \delta\int_a^b x(f(x) - g(x)dx$$

$$\Delta M_x = \frac{(f(\bar{x}_i) + f(\bar{x}_i))}{2}\delta(f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i))\Delta x_i \qquad M_x = \frac{\delta}{2}\int_a^b (f^2(x) - g^2(x)dx$$

Pusat massanya $\left(\bar{x} = \frac{M_y}{m}, \bar{y} = \frac{M_x}{m}\right)$. Pusat massa keeping homogeny ini tidak bergantung pada rapat massa δ, dan bias di sebut *sentroid* (Djohan dan Budhi, 2007).

Contoh Soal

Misalkan pelat datar dengan kerapatan seragam memiliki bentuk yangterkandung oleh $y = x^2, y = 1,$ dan $x = 0$, pada kuadran pertama. Temukan pusat massa. (Karena densitasnya konstan, pusat massa hanya bergantung pada bentuk pelat, bukan kepadatannya, atau dengan kata lain, ini adalah kuantitas geometrik murni. Dalam kasus seperti itu, pusat massa disebut pusat massa.)



Ini adalah masalah dua dimensi, tapi bisa dipecahkan seolah-olah ada dua masalah satu dimensi: kita perlu menemukan koordinat x dan y dari pusat massa, x dan y, dan untungnya kita bisa melakukannya secara independen. Bayangkan melihat sisi pelat pada, dari bawah sumbu , x . Pelat akan tampak seperti balok, dan bagian pendek dari "balok", katakanlah antara x_i dan, $x_i + 1$ adalah massa strip pelat antara x_i dan, $x_i + 1$. Lihat gambar menunjukkan pelat dari atas dan karena tampak tepi pada.Karena pelat memiliki kerapatan seragam kita mungkin juga menganggap bahwa σ = 1. Kemudian massa pelat antara xi dan xi + 1 kira-kira $m_i = \sigma(1 - x_i^2)\,\Delta x = (1 - x_i^2)\Delta x$ Sekarang kita bisa menghitung momen di sekitar sumbu y:

$$M_y = \int_0^1 x(1-x^2)dx = \frac{1}{4}$$

dan massa totalnya

$$M = \int_0^1 (1-x^2)dx = \frac{2}{3}$$

dan pusat massanya

$$\bar{x} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{8}$$

Selanjutnya kita melakukan hal yang sama untuk menemukan $\bar{y}$.

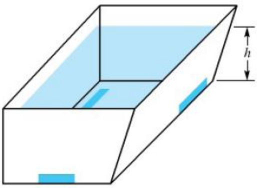
Massa piring antara y_i dan $y_i + 1$ kira - kira $n_i = \sqrt{y}\Delta y$, jadi

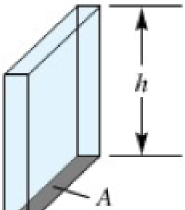
$$M_x = \int_0^1 y\sqrt{y}dy = \frac{2}{5}$$

$$\bar{y} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{5}$$

e. Gaya Cairan (Fluida)

Perhatikan pada gambar sebuah fluida dengan kepadatan δ setinggi *h*. maka gaya pada sebuah persegi panjang datar dengan luas A yang terlihat pada dasar tangki, sama dengan berat kolam cairan yang terletak tepat diatas persegi panjang itu yaitu:



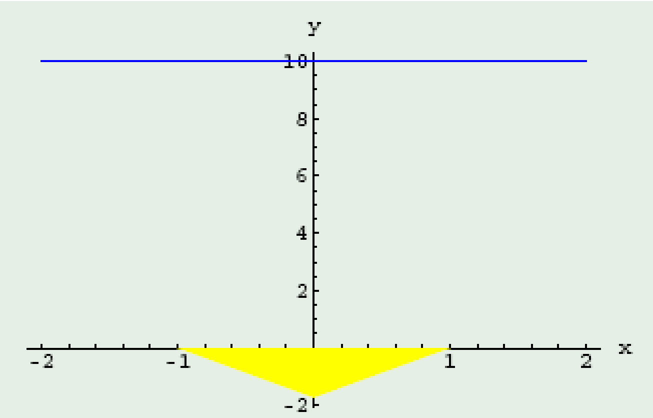


$F = \delta hA$

$$F = \delta hA$$

Contoh Soal

Sebuah bendungan memiliki gerbang terendam dalam bentuk yang sepadan Segitiga, dua kaki di sisi dengan basis horisontal terdekat Permukaan air dan sepuluh kaki di bawahnya. Temukan kekuatan di gerbang?



Penyelesaian:

Tepi-tepi piring digambarkan oleh garis-garis dengan Persamaan $y = -2 + 2x$ dan $y = -2 - 2x$

Lebar pelat adalah $W(y) = 2 + y$

Kekuatan hidrostatik adalah

$$
\begin{aligned}
F &= \rho g \int_a^b h(y) W(y) dy 4 \\
&= 64{,}2 \int_{-2}^{0} (10 - y)(2 + y) dy \\
&= 64{,}2 \int_{-2}^{0} (20 + 8y - y^2 \\
&= 62{,}4(\frac{64}{3}) \approx 1331{,}2 \text{ lb}
\end{aligned}
$$

Latihan Soal

Esai

1. Sebuah pegas mempunyai panjang alami 10 cm. Untuk menarik dan menahannya sejauh 2 cm diperlukan gaya sebesar 3 dyne. Tentukan kerja yang dilakukan untuk menariknya sejauh 5 cm dari panjang alaminya.(Gunakan hukum Hooke: untuk menahan pegas sejauh *x* cm diperlukan gaya sebesar *F* = *kx*, dengan *k* adalah konstanta pegas).
2. Sebuah rantai yang massa 1 kg tiap meter, dipakai mengangkat benda 20 kg dari dasar sumur yang dalamnya 15 meter. Tentukan kerja yang dilakukan untuk mengangkat benda tersebut sampai permukaan sumur. (petunjuk: gaya yang diperlukan untuk mengangkat benda adalah berat benda + berat rantai yang terjulur). (g = 10 m/s^2)
3. Untuk setiap pegas berlaku hukum hooke, buktikan bahwa kerja yang diperlukan untuk menarik pegas x_0 ke x_1 adalah $W = \frac{1}{2}k(x_1^{\ 2} - x_0^{\ 2})$
4. Lima buah benda dengan massa 1, 4, 2, 3, dan 6 gram terletak pada koordinat (6,−1), (2, 3), (−4, 2), (−7, 4) dan (2,−2). Tentukan titik beratnya (pusat massanya).
5. Pada garis yang ada sitem koordinatnnya ada massa $m_1 = 5, m_2 = 6, m_3 = 12, m_4 = 9$ yang terdapat pada titik-titik $x_1 = 2, \mathrm{x}_2 = -2, x_3 = 1, m_4 = 2$. Tentukan pusat massaya!
6. Tentukan sentroid daerah yang dibatasi oleh $y = x^3$ dan $y = \sqrt{x}$!
7. Tangki berbentuk kerucut terbalik penuh berisi air. Tinggi tangki 2 meter dan jari-jari permukaan atasnya 1 meter. Bila besarnya gaya gravitasi adalah g, tentukan kerja yang dilakukan untuk memompa seluruh air sampai permukaan atas tangki.

8. Minyak bocor pada tengki, memenuhi persamaan: $V'(t) = \frac{110 - t}{110}$, dimana t dalam jam dan V dalam gallon. Dari tangki penyimpanan yang awalnya penuh dengan 55 galon. Berapa banyak kebocoran minyak keluar dalam 30 menit?
9. Kebocoran air dalam tenki menyimpanan 200 galon pada $V'(t) = 20 - t$ dimana t di ukur dalam jam dan V dalam gallon berapa banyak iar yang bocor antara 10 dan 20 jam?
10. Sam dengan soal no 9 berapa lam waktu yang dibutuhkan tangki untuk terkuras habis?

Bagian 3 Pertumbuhan Eksponensial

1. Pertumbuhan Eksponensial

Misalkan suatu populasi bertambah sebesar $\Delta y = k\ y\ \Delta t$. Dengan *y = y(t)* menyatakan jumlah populasi pada saat t dan k konstanta. Jadi

$$\frac{\mathrm{dy}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = ky = kdt$$

Integralkan kedua ruas, kita peroleh :

$$\ln y = kt + C$$

$$y = e^{\mathrm{kt}+C} = Ae^{kt}$$

Misalkan diketahui jumlah populasi awal *y(0)=* y_0 maka $y_0 = Ae^0 = A$ sehingga

$$y = y_0 e^{kt}$$

Nilai k dapat ditentukan apabila kita mempunyai informasi tambahan, misalnya $y(10) = 2y_0$ (waktu melipat ganda= 10 satuan waktu). Pertumbuhan eksponen ini dapat dilihat dari perkiraan-perkiraan jumlah penduduk di dunia. Penduduk dunia diperkirakan sebanyak 6,4 milyar pada tahun 2004. Dikatakan bahwa penduduk akan mencapai 7,9 milyar.

Dari persoalan tersebut dapat diselesaikan secara matematis, misalkan $y = f(t)$ menyatakan ukuran populasi pada saat t, dengan t banyaknya tahun setelah 2004. Sebenarnya *f(t)* berupa bilangan bulat dan grafiknya " meloncat" apabila ada seorang lahir atau meninggal dunia. Namun untuk populasi besar, loncatan-loncatan ini demikian relatif kecil terhadap total populasi bahwasanya tidak akan terlalu salah jika menganggap bahwa *f* berupa suatu fungsi terdiferensiasikan.

Nampaknya beralasan untuk mengandaikan bahwa pertambahan populasi Δy (kelahiran dikurangi kematian) dalam jangka waktu pendek Δt sebanding terhadap ukuran populasi pada awal peri9ode dan panjangnya peri9ode tersebut.

Jadi $\Delta y = ky.\Delta t$, atau $\dfrac{\Delta y}{\Delta t} = ky$

Dalam bentuk limit , ini memberikan persamaan diferensial $\dfrac{dy}{dt} = ky$

Jika $k > 0$ populasi tumbuh, jika $k < 0$ populasi berkurang. Untuk populasi dunia , sejarah menunjukkan bahwa *k* sekitar 0,0132 (dengan anggapan bahwa *t* diukur dalam tahun), walaupun beberapa instansi melaporkan angka yang berbeda.

Penyelesaian $\dfrac{dy}{dt} = ky$ dengan syarat $y = y_0$ ketika t=0. Dengan memisahkan variabel dan mengintegrasikan, maka dapat diperoleh:

$$\frac{dy}{y} = kdt$$

$$\int \frac{dy}{dt} = \int kdt$$

$$\ln y = kt + C$$

Syarat $y = y_0$ pada $t = 0$ memberikan $C = \ln y_0$ sehingga,

$$\ln y - \ln y_0 = kt \text{ atau } \ln \frac{y}{y_0} = kt$$

Perubahan ke bentuk eksponen menghasilkan $\dfrac{y}{y_0} = e^{kt}$

Atau, akhirnya : $y = y_0 e^{kt}$

Ketika $k > 0$, tipe pertumbuhan ini disebut pertumbuhan eksponensial, dan ketika $k < 0$ maka disebut peluruhan eksponensial.

Kembali ke masalah populasi dunia, untuk mengukur t dalam tahun setelah Januari 2004, dan y dalam milyar orang. Jadi $y_0 = 6{,}4$ dan oleh karena k =0,0132

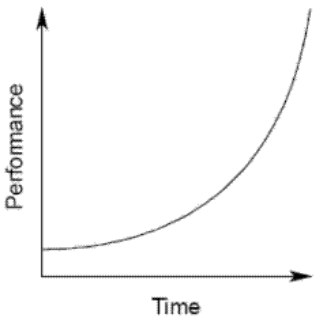
$$y = 6{,}4e^{0{,}0132t}$$

Tahun 2020, ketika t = 16, maka dapat diperkirakan bahwa y akan bernilai sekitar

$$y = 6{,}4^{0{,}0132(16)} \approx 7{,}9 \text{ milyar manusia.}$$

(Purcell, E. J., & Varberg, D. ,1998)

PERTUMBUHAN EKSPONENSIAL



Model eksponensial $y = y_0^{\,kt}$, $k > 0$, untuk pertumbuhan populasi bercacat karena memroyeksikan pertumbuhan yang semakin cepat secara tak terhingga jauh ke masa depan. Pada kebanyakan kasus (termasuk kasus populasi dunia), keterbatasan ruang dan sumber daya pada akhirnya akan memaksa laju pertumbuhan yang lebih lambat. Ini menyarankan model pertumbuhan populasi yang lain disebut model logistik. Dalam model ini laju pertumbuhan sebanding ,baik terhadap selisih $L - y$ dengan L adalah populasi maksimum yang dapat ditunjang. Ini menuju ke persamaan diferensial.

$$\frac{dy}{dt} = ky(L - y)$$

Untuk nilai y kecil, $dy/dt \approx kLy$ yang menunjukkan pertumbuhan eksponensial tetapi ketika y mendekati L, pertumbuhan terbatasi dan dy/dt menjadi semakin kecil (Purcell, E. J., & Varberg, D. ,1998).

2. Peluruhan Eksponensial

a. Peluruhan radioaktif

Tidak segala sesuatu tumbuh, beberapa berkurang menurut waktu. Khususya zat-zat radioaktif mengalami peluruhan dan berlangsung pada laju yang sebanding dengan banyaknya zat yang ada sehingga laju perubahannya juga memenuhi persamaan diferensial.

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

Tetapi sekarang k negatif. Adalah tetap benar bahwa $y = y_0 e^{kt}$ merupakan penyelesaian terhadap persamaan ini.

Contoh Soal

1. Laju peluruhan suatu bahan radioaktif sebanding dengan jumlah atom (*N*) yang tersisa pada saat *t*. Jika semula, pada *t*=0 terdapat N_0 atom, cari jumlah atom saat *t* .

   Penyelesaian:

   Laju peluruhan bahan radioaktif memenuhi persamaan diferensial seperti berikut :

   $\frac{dN}{dt} = 2\lambda \mathrm{N}$

   (konstanta λ merupakan konstanta peluruhan, yang menunjukkan laju peluruhan per atom).

   Solusi dari persamaan diferensial tersebut dapat dicari melalui :

$$\frac{dN}{dt} = 2\lambda N$$

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt$$

$$\int \frac{1}{N} dN = \int_{t_0}^{t_n} -\lambda dt$$

$$\ln N = -\lambda t + C$$

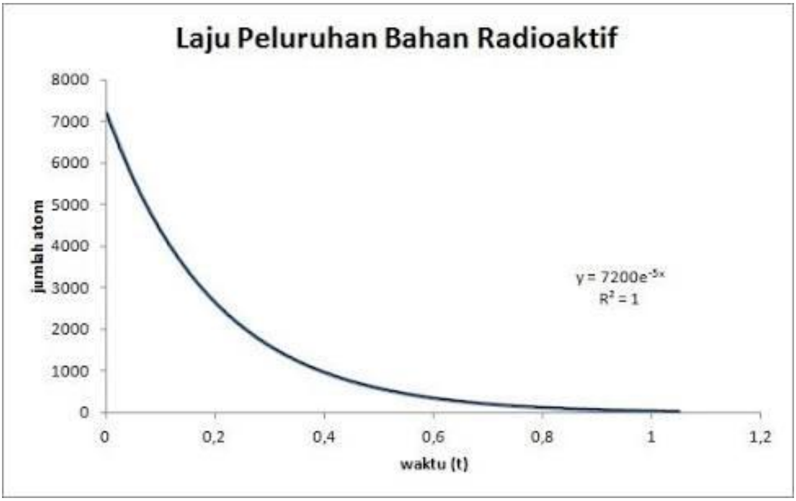
$$N = Ce^{-\lambda t}$$

   Ini adalah solusi umum.

   Karena diberikan $N = N_0$ pada *t*=0 maka konstanta itu adalah $\ln N_0$ sehingga solusi khususnya adalah:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

Kemudian dibuatlah plot grafiknya seperti berikut :



Dari grafik terlihat bahwa plot data sesuai dengan *trendline* fungsi eksponensial, yaitu menghasilkan persamaan:

$$y = 7200e^{kt}$$

2. Karbon 14, salah satu isotop karbon , adalah zat radioaktif dan meluruh dengan laju yang sebanding dengan banyaknya zat yang ada. Waktu paruhnya adalah 5730 tahun, artinya dalam waktu 5730 tahun , karb9on 1n, artinya dalam waktu 5730 tahun, karbon 14 akan meluruh hingga menjadi setengah massa awalnya . Jika pada saat awal terdapat 10 gram, berapakah yang akan tersisa setelah 2000 tahun ?

   Penyelesaian:
   Dari waktu paruhnya 5730 tahun, dapat ditentukan k ,

$$\frac{1}{2} = 1e^{kt}$$

   Atau setelah mengambil logaritma

$$-\ln 2 = 5730k$$

$$k = \frac{-\ln 2}{5730} \approx -0{,}000121$$

Jadi, $y = 10e^{-0{,}000121t}$

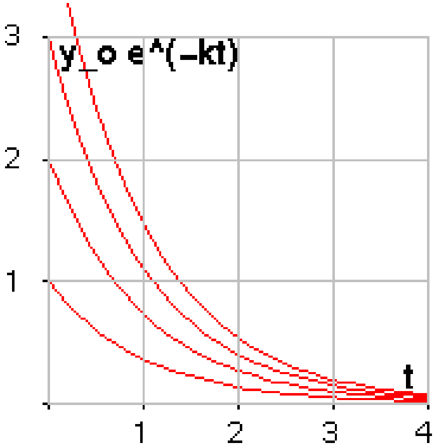
Pada t =2000 yaitu, $y = 10e^{-0{,}000121(2000)} \approx 7{,}85$ gram

b. Hukum Newton Pendinginan

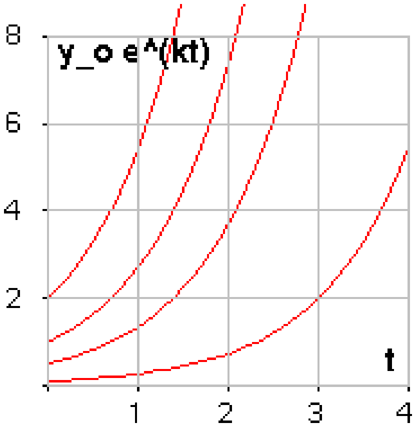
Hukum Newton tentang pendinginan mengatakan bahwa laju sebuah benda mendingin atau memanas berbanding lurus dengan selisih suhu diantara benda tersebut dengan medium sekelilingnya. Secara spesifik, misalkan sebuah benda dengan suhu awal T_0 diletakkan diruangan yang suhunya adalah T_1 . Jika *T(t)* menyatakan suhu benda pada waktu t, maka Hukum Newton tentang Pendinginan menyatakan bahwa:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_1)$$

Dimana $\frac{dT}{dt}$ merupakan fungsi temperatur terhadap waktu, *k* adalah konstanta, *T* adalah suhu pada saat *t* sekon, dan T_1 adalah suhu pada saat *t*=0 sekon. Nilai dari *k* sendiri tidak diketahui, namun nilainya bisa didapat dengan menurunkan persamaan diatas. Nilai dari *k* dapat berharga -*k* dan +*k* , hal ini dapat ditentukan dengan cara : apabila suhunya mengalami penaikan nilai yang dipakai adalah +*k*, sebaliknya bila suhu mengalami penurunan maka nilainya adalah -*k*. Berikut adalah grafik dari nilai *k*.



Grafik untuk pendinginan suhu(-k)



Grafik untuk pemanasan suhu (+k)

Contoh Soal

Sebuah benda diambil dari alat pemanas pada 350°F dan dibiarkan mendingin dalam ruangan pada 70°F. Jika suhu jatuh ke 250°F dalam satuan jam, akan berapakah suhunya tiga jam setelah diambil dari alat pemanas?

Penyelesaian:

Persamaan diferensial dapat dituliskan sebagai

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 70)$$

$$\frac{dT}{T - 70} = kdt$$

$$\int \frac{dT}{T - 70} = \int kdt$$

$$\ln|T - 70| = kt + C$$

Karena suhu awal lebih besar daripada 70, nampaknya masuk akal bahwa benda akan menurun ke arah 70; sehingga T-70 akan positif dan tidak diperlukan nilai mutlak. Ini menuju ke persamaan:

$$T - 70 = e^{kt+C}$$

$$T = 70 + C_1 e^{kt}$$

Dimana $C_1 = e^c$. Sekarang kita terapkan syarat awal , T(0)=350 untuk mencari C_1

$$350 = T(0) = 70 + C_1 e^{k \cdot 0}$$

$$280 = C_1$$

Jadi penyelesaian persamaan diferensial adalah; $T(t) = 70 + 280e^{kt}$

Untuk mencari k , kita terapkan syarat bahwa pada waktu $t = 1$ suhu adalah $T(1) = 250$

$$250 = T(1) = 70 + 280e^{k\cdot 1}$$

$$280e^{k} = 180$$

$$e^{k} = \frac{180}{280}$$

$$k = \ln\frac{180}{280} \approx -0{,}44183$$

Ini memberikan

$$T(t) = 70 + 280e^{-0{,}44183t}$$

Dan setelah 3 jam , suhunya adalah

$$T(3) = 70 + 280e^{-0{,}44183\cdot 3} \approx 144{,}4^{o}\,F$$

Latihan Soal

A. Pilihan Ganda

1. Seorang peneliti di sebuah lembaga penelitian sedang mengamati pertumbuhan suatu bakteri di sebuah laboratorium mikrobiologi. Pada kultur bakteri tertentu, satu bakteri membelah menjadi *r* bakteri setiap jam. Hasil pengamatan menunjukkan bahwa jumlah bakteri pada akhir 3 jam adalah 10.000 bakteri dan setelah 2 jam kemudian, jumlah bakteri tersebut menjadi 40.000 bakteri. Berapa banyak bakteri pada akhir 8 jam.
   A. 320.000 bakteri
   B. 325.000 bakteri
   C. 330.000 bakteri
   D. 335.000 bakteri
   E. 340.000 bakteri
2. Sebuah benda diambil dari alat pemanas pada 350°F dan dibiarkan mendingin dalam ruangan pada 70°F . Jika suhu jatuh ke 250°F dalam 1 jam, akan berapakah suhunya tiga jam setelah diambil dari alat pemanas ..
   A. 114,4°F
   B. 124,5°F
   C. 125,4°F
   D. 130,4°F
   E. 134,5°F
3. Populasi bertambah pada laju yang sebanding terhadap ukurannya. Setelah 5 tahun, ukuran populasi adalah 164.000. Setelah 12 tahun, ukuran populasi adalah 235.000. Berapa ukuran populasi pada awalnya ...
   A. 121.000
   B. 123.821
   C. 125.822
   D. 126.822
   E. 127.921

4. Sebuah benda awalnya pada 26°C diletakkan dalam air yang bersuhu 90°C . Jika suhu benda meninggi ke 70°C dalam 5 menit, akan berapakah suhunya setelah 5 menit ...
   A. 82,7°C
   B. 83,7°C
   C. 84,5°C
   D. 85,4°C
   E. 86,3°C
5. Sebuah negara memiliki populasi 10 juta pada tahun 1985 , laju pertumbuhan sebesar 1,2 % per tahun dan imigrasi dari negara lain sebanyak 60.000 tiap tahun. Dengan menggunakan persamaan diferensial, Berapakah prakiraan populasi tahun 2010. (a=0,012)....
   A. 15,20 juta
   B. 15,25 juta
   C. 25,15 juta
   D. 25,20 juta
   E. 30,15 juta

B. Essay

1. Jika $y = \left(x^2 + 1\right)^{\sin x}$, carilah $\dfrac{dy}{dt}$
2. Carilah $\int 2^{x^3} x^2 dx$
3. Carilah hasil dari $y = \left(x^2 + 1\right)^{\ln x}$
4. Bahan radioaktif memiliki waktu paruh selama 700 tahun. Jika terdapat 10 gram pada awalnya , berapa banyakkah akan tersisa setelah 300 tahun ?
5. Buktikan bahwa jika laju perubahan relatif dari adalah konstanta negatif maka fungsi harus mewakili peluruhan eksponensial!

Bagian 4 Persamaan Diferensial Linier (PDL) Orde Ke-n

1. PDL Orde Ke-n dengan Koefisien Konstan

a. Persamaan Karakteristik

Bentuk persamaan sebagai berikut:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad \ldots(1)$$

dengan koefisien-koefisien konstan $a_j \; (j = 0,1,\ldots,n-1)$ adalah

$$r^{(n)} + a_{n-1}r^{(n-1)} + \ldots + a_1 \mathrm{r} + a_0 = 0 \qquad \ldots(2)$$

Persamaan tersebut merupakan persamaan karakteristik yang diperoleh dari persamaan (1) dengan menggantikan $y^{(j)}$ dengan $r^{(j)} (j = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Untuk akar-akar dari persamaan karakteristik sangat mungkin sekali terdapat banyak kembaran dari akar-akarnya yang disebut sebagai *multiplisitas* (kembaran) = banyaknya kembaran suatu akar (Tazi, 2008, hal. 245).

b. Solusi Umum

Akar-akar dari persamaan karakteristik untuk menentukan solusi dari persamaan (1) yaitu: jika-akar-akarnya $r_1, r_2, ..., r_n$ yang merupakan akar-akar real dan jelas, maka solusinya adalah:

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_1 x} + ... + c_n e^{r_n x} \qquad ...(3)$$

(Bronson, 2007)

Contoh Soal

1. Selesaikan persamaan berikut:

   $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$

   Penyelesaian:

   Persamaan karakteristiknya adalah: $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$ yang dapat difaktorkan menjadi:

   $$(r-1)(r-2)(r-3) = 0$$

   Akar-akarnya adalah $r_1 = 1, r_2 = 2$ dan $r_3 = 3$ maka solusi umumnya adalah

   $$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$$

2. Selesaikan persamaan berikut:

   $y' - 5y = 0$

   Penyelesaian:

   Persamaan karakteristiknya adalah $r - 5 = 0$ yang memiliki akar tunggal $r_1 = 5$ Sehingga solusi umumnya adalah: $y = C_1 e^{5x}$

3. Selesaikan $\frac{d^4x}{dt^4}-4\frac{d^3x}{dt^3}+7\frac{d^2x}{dt^2}-4\frac{dx}{dt}+6x=0$

Penyelesaian:

Persamaan karakteristiknya, $r^4-4r^3+7r^2-4r+6=0$ memiliki akar-akar $r_1=2+i\sqrt{2},\ r_2=2-i\sqrt{2}, r_3=i, \text{dan}\ r_4=-i$. Sehingga solusi umumnya adalah:

$$y=c_1e^{2+i\sqrt{2}x}+c_2e^{2-i\sqrt{2}x}+c_3e^{ix}+c_4e^{-ix}$$

4. Selesaikan $\frac{d^4y}{dt^4}-4\frac{d^3y}{dt^3}-5\frac{d^2y}{dt^2}+36\frac{dx}{dt}-36x=0$ jika salah satu solusinya adalah xe^{2x} .

Penyelesaian:

Jika xe^{2x} adalah solusi maka e^{2x} juga adalah solusi yang berarti bahwa $(r-2)^2$ adalah suatu faktor dari persamaan karakteristik $r^4-4r^3-5r^2+36r-36=0$ Sehinnga:

$$\frac{r^4-4r^3-5r^2+36r-36}{(r-2)^2}=r^2-9$$

Dengan $r\pm 3$ yang memiliki solusi e^{3x} dan e^{-3x} sehingga didapatkan solusi umumnya menjadi:

$$y(x)=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+c_3e^{3x}+c_4e^{-3x}$$

(Bronson, 2007)

2. PDL Orde Ke-n dengan Koefisien Tak Tentu

a. Metode dalam Bentuk Sederhana

Bentuk sederhana dari PD orde ke-2 dengan koefisien tak tentu mengasumsikan bahwa solusi tertentunya memiliki bentuk:

$$y_p(x) = A_1 y_1(x) + A_2 y_2(x) + \ldots + A_n y_n(x)$$

Dimana $A_1, A_{2,} \ldots, A_n$ melambangkan konstanta multiplikatif sembarang. Konstanta sembarang ini ditentukan dengan memasukkan solusi ke dalam PD dan menyertakan suku-suku yang sama.

Kasus 1.

Apabila $k(x) = P_n(x)$, polinomial tingkat ke-n dalam x. Asumsikan solusinya memiliki bentuk

$$y_p = A_n x^n + A_{n-1} y^{n-1} x + \ldots + A_1 x + A_0$$

Dimana $A_j\,(j = 0,1,2,\ldots,n)$ adalah konstanta yang harus ditentukan.

Kasus 2.

Apabila $k(x) = ke^{ax}$ dimana k dan a adalah konstanta yang diketahui. Asumsikan solusinya dalam bentuk

$$y_p = Ae^{ax}$$

Dimana A adalah konstanta yang harus ditentukan.

Kasus 3.

Apabila $k(x) = k_1 \sin \beta x + k_2 \cos \beta x$ dimana $k_1, k_2, dan\, \beta$ adalah konstanta yang diketahui. Asumsikan solusinya memiliki bentuk.

$$y_p = A \sin \beta x + B \cos \beta x$$

Dimana A dan B adalah konstanta yang harus ditentukan.

b. Generalisasi

Jika $k(x)$ adalah hasil kali dari suku-suku yang dibahas dalam kasus 1-3, maka ambillah y_p sebagai hasil kali dari solusi-solusi yang diasumsikan. Secara khusus, jika $k(x) = e^{ax}P_n(x)$ adalah hasil kali dari suatu polinomial dengan suatu eksponensial, maka:

$$y_p = e^{ax}(A_n x^n + A_{n-1}y^{n-1}x + \ldots + A_1 x + A_0)$$

Dimana A seperti pada kasus 1. Jika $k(x) = e^{ax}P_n(x)\sin\beta x$ adalah hasil dari polinomial, eksponensial, dan kondisi sinus, atau jika $k(x) = e^{ax}P_n(x)\cos\beta x$ adalah hasil dari polinomial, eksponensial, dan kondisi cosinus, maka:

$$y_p = e^{ax}\sin\beta x(A_n x^n + \ldots + A_1 x + A_0) + e^{ax}\cos\beta x(\mathrm{B}_n x^n + \ldots + B_1 x + B_0)$$

Dimana A_j dan $B_j\,(j = 0,1,2,\ldots,n)$ adalah konstanta yang harus ditentukan.

c. Modifikasi

Jika ada suku dalam solusi yang diajukan dengan mengabaikan konstanta multiplikatif yang juga merupakan suku dari y_h .

Bagian 5 Persamaan Diferensial Linear Biasa Orde-Kedua

1. PD Linier Orde-2

Persamaan umum diferensial orde tinggi adalah:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+...+a_1 y'+a_0 y=h(x)$$

Untuk persamaan diferensial orde-2

$$a_2(x)\frac{d^2 y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=h(x)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2}+\frac{a_1(x)}{a_2(x)}\frac{d}{dx}+\frac{a_0(x)}{a_2(x)}y=\frac{h(x)}{a_2(x)}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2}+p(x)\frac{d}{dx}+q(x)y=f(x)$$

a. Titik dimana $a_2(x)=0$ disebut titik singular

b. $f(x)$ disebut fungsi gaya

c. Bila $f(x)=0$, maka persamaan diferensial menjadi homogen.

(Tazi, 2008)

2. PD Homogen Linear Orde-Kedua dengan Koefisien Konstan

a. Persamaan Karakteristik

Tanda dari persamaan diferensial homogen bilamana ruas kanan sama dengan nol.

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + y = h(x)$$

Dengan $h(x) = 0$ (Suharto, 1992)

Koefisien konstan adalah mengambil fungsi $g(t), p(t), dan\, q(t)$ dengan nilai konstan dan jika kita ambil fungsi $g(t) = 0$ sehingga kita sebut dengan persamaan homogen.

Bentuk umum persamaan diferensial linier homogen orde 2 adalah sebagai berikut: $ay'+by'+cy = 0$

Dimana $a, b, dan\, c$ adalah konstanta. Persamaan aljabarnya menjadi:

$$r^2 + a_1 r + a_0 = 0$$

Pesamaan tersebut merupakan persamaan karakteristik (Waluya, 2006: 46).

Contoh Soal

1. Persamaan karakteritik dari $y''+3y'-4y = 0$ adalah:

   Penyelesaian:

   Persamaan karakterisitik dari $y''+3y'-4y = 0$ adalah $r^2 + 3r - 4 = 0$

2. Persamaan karakteristik dari $y''+5y'+6y = 0$ adalah:

   Pembahasan:

   Persamaan karakteristiknya yaitu $r^2 + 5r + 6 = 0$

b. Solusi Umum

Solusi umum dari pesamaan $y''+a_1y'+a_0y=0$ yang diperoleh dari akar-akar pada persamaan $r^2+a_1r+a_0=0$. Ada 3 macam penyelesaian persamaan karakteristik sebagai berikut:

Teorema 1.

Apabila akar r_1 dan r_2 dua-duanya adalah real dan beda, dengan $b^2-4ac>0$. Sehingga solusi umumnya yaitu:

$$y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}$$

Teorema 2.

Apabila akar r_1 dan r_2 kembar atau $r_1=r_2$ dengan $b^2-4ac=0$ Maka solusi umumnya adalah:

$$y=c_1e^{r_1x}+c_2xe^{r_1x}$$

Teorema 3.

Apabila r_1 dan r_2, merupakan pasangan akar bilangan kompleks dengan $b^2-4ac<0$. Maka akar-akar dari pesamaan $r^2+a_1r+a_0=0$ harus muncul dalam pasangan konjugat. Jadi solusi komplek umumnya adalah:

$$y=c_1e^{ax}\cos bx+c_2e^{ax}\sin bx$$

(Tazi, 2008)

Contoh Soal

1. Selesaikan $y''-y'-2y=0$

   Penyelesaian:

   Persamaan karakteristik $r^2-r-2=0$ yang dapat difaktorkan menjadi $(r+1)(r-2)=0$ dengan akar-akar $r_1=0\ dan\ r_2=2$ yang merupakan akar-akar real dan jelas sehingga solusi umumnya menjadi:

   $$y(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}$$

2. Carilah penyelesaian persamaan diferensial $y''+4y'=0$

   Penyelesaian:

   Persamaan karakteristik:

   $$r^2+4r=0$$
   $$r(r+4)=0$$
   $$r_1=0\ dan\ r_2=-4$$

   Penyelesaian persamaan diferensial

   $$\boxed{\begin{aligned} y&=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}\\ y&=c_1+c_2e^{-4x}\end{aligned}}$$

3. Selesaikanlah persamaan berikut:

   $y''-5y=0$

   Penyelesaian:

   Persamaan karakteristik $r^2-5=0$ yang dapat difaktorkan menjadi $(r-\sqrt{5})(r+\sqrt{5})=0$ dengan akar-akar $r_1=\sqrt{5}$ *dan* $(r_2=-\sqrt{5})$ yang merupakan akar-akar real dan jelas sehingga solusi umumnya menjadi:

$$y(x) = c_1 e^{\sqrt{5}x} + c_2 e^{-\sqrt{5}x}$$

(Bronson, 2007)

4. Selesaikan persemaan berikut:

$y'' + 4y = 0$

Penyelesaian:

Persamaan karakteristiknya adalah $r^2 + 4 = 0$ yang dapat difaktorkan menjadi:

$$(r - 2i)(r + 2i) = 0$$

Akar-akar ini merupakan pasangan konjugat komplek, dengan $a = 0 \; dan \; b = 2$ Jadi solusi umumnya adalah:

$$y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

(Bronson, 2007)

5. Selesaikan: $\frac{d^2 I}{dt^2} + 20\frac{dI}{dt} + 200I = 0$

Penyelesaian:

Persamaan karakteristiknya $r^2 + 20r + 200 = 0$ Untuk mencari akar-akarnya yaitu dengan menggunakan rumus persamaan kuadrat sebagai berikut:

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$r_{1,2} = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4.1.200}}{2.1}$$

$$r_{1,2} = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4.1.200}}{2.1}$$

$$r_{1,2} = -10 \pm 10i$$

Sehingga solusi umumnya adalah:

$$I = c_1 e^{-10t} \cos 10t + c_2 e^{-10t} \sin 10t$$

(Bronson, 2007)

6. Selesaikan $y''=0$

Penyelesaian:

Persamaan karakteristiknya adalah $r^2=0$ yang memiliki akar-akar $r_1=r_2=0$. Sehingga solusi umumnya adalah:

$$y(x)=c_1e^{0x}+c_2xe^{0x}=c_1+c_2x$$

7. Selesaikan $100\frac{d^2N}{dt^2}-20\frac{dI}{dt}+N=0$

Penyelesaian:

$100\frac{d^2N}{dt^2}-20\frac{dI}{dt}+N=0$ dengan membagi kedua sisi persamaan diferensial ini dengan 100, untuk membuat koefisien dari turunan yang tertinggi menjadi satu maka diperoleh:

$$100\frac{d^2N}{dt^2}-20\frac{dN}{dt}+N=0$$

$$\frac{d^2N}{dt^2}-0,2\frac{dN}{dt}+0,01N=0$$

Persamaan karakteristiknya adalah: $r^2-0,2r+0,01=0$ yang dapat difaktorkan menjadi: $(r-0,1)^2=0$ sehingga akar-akar yang didapat adalah $r_1=r_2=0,1$ yang merupakan akar-akar real dan jelas. Sehingga solusi umumnya menjadi:

$$N=c_1e^{0,1t}+c_2te^{0,1t}$$

(Bronson, 2007)

8. Tentukan solusi dari persamaan $y''+5y'+6y=0$ dimana solusi nilai awalnya $\mathrm{y}(0)=2, \quad y'(0)=3$

Penyelesaian:

Persamaan karakteristiknya dari persamaan $y''+5y'+6y=0$ yaitu: $r^2+5r+6=0$

yang dapat difaktorkan menjadi $(r+2)(r+3)=0$ dengan akar-akar $r_1=-2\ dan\ r_2=-3$ yang merupakan akar-akar real dan jelas sehingga solusi umumnya menjadi:

$$y(x)=c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x}$$

Untuk $y(0)=2$

$$y(x)=c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x}$$

$$y(0)=c_1e^{-2.0}+c_2e^{-3.0}$$

$$2=c_1+c_2 \qquad \text{... (1)}$$

Untuk $y'(0)=3$

$$y(x)=c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x}$$

$$y'(x)=-2c_1e^{-2x}-3c_2e^{-3x}$$

$$y'(0)=-2c_1e^{-2.0}-3c_2e^{-3.0}$$

$$3=-2c_1-3c_2 \qquad \text{...(2)}$$

Lakukan proses eliminasi dari persamaan (1) dan (2) sehingga didapat $c_1=9\,dan\,c_2=-7$

Sehingga didapatkan solusi khususnya berikut

$$y(x)=c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x}$$

$$y(x)=9e^{-2x}-7e^{-3x}$$

(Boyce, 1976: 133-134)

3. Persamaan Diferensial Tak Homogen Linear Orde-Kedua - Koefisien Tak Tentu

Mari kita perhatikan persamaan tak homogen berikut

$$y''+p(t)y'+q(t)y=g(t)$$

Dimana $p(t), q(t), dan\, g(t)$ adalah fungsi-fungsi kontinu pada suatu interval *I*. Dalam hal ini terdapat beberapa teorema berikut.

Teorema 1.

Jika y_p adalah solusi dari persamaan tak homogen, maka y_h solusi dari pesamaan homogen. Dan jika $e^{r_1 t}$ dan $e^{r_2 t}$ adalah basis atau pembangun dari solusi-solusi untuk persamaan homogen, maka

$$Y_h = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

Dimana C_1 dan C_2 adalah konstanta.

Teorema 2.

Solusi umum persamaan tak homogen dapat dinyatakan sebagai berikut

$$y = y_h + y_p$$

Dimana y_p melambangkan suatu solusi untuk pengganti persamaan diferensial dan y_h adalah solusi umum untuk persamaan homogen yang berkaitan dengan $y(x)=0$

Melalui teorema-teorema tersebut menunjukkan bagaimana cara menentukan solusi untuk persamaan tak homogen sebagai berikut.

a. Tentukan solusi umum untuk persamaan homogen
b. Temukan solusi untuk persamaan tak homogen
c. Jumlahkan hasil solusi dari persamaan homogen dan tak homogen
d. Temukan C_1 dan C_2 dari kondisi-kondisi awal yang telah ditentukan.

Cara mendapatkan y_p adalah dengan mengasumsikan kemudian mendiferensialkan bertingkat-tingkat, untuk mencari konstanta serta asumsi solusi yang tepat sesuai dengan pembatas-pembatas yang ada (Suharto, 1992).

Beberapa aturan untuk menentukan solusi khusus dengan menentukan koefisien tak tentu (Waluya, 2006: 56-58).

$g(t)$	Y_p
$g(t) = e^{kt}$	$Y_p = Ae^{kt}$
$g(t) = \cos t \; atau \sin t$	$Y_p = A\cos t + B\sin t$
$g(t) = a_n t^n + \ldots + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$	$y_p = A_n t^n + \ldots + A_2 t^2 + A_1 t + A_0$
$g(t) = t^2 e^{kt}$	$y_p = (A_2 t^2 + A_1 t + A_0)e^{kt}$
$g(t) = e^{kt}\cos t \; atau \; e^{kt}\sin t$	$y_p = e^{kt}(A\cos t + B\sin t)$
$g(t) = g_1(t) + g_2(t)$	$y_p = \mathrm{y}_p^1 + \mathrm{y}_p^2$

Contoh Soal

1. Temukan solusi kusus persamaan $y'' - 3y - 4y = 3e^{2t}$.

   Penyelesaian:

   Persamaan karakteristiknya $r^2 - 3r - 4 = 3e^{2t}$ sehingga didapatkan faktor-faktornya $(r-4)(r+1) = 0$ dengan $r_1 = 4$ dan $r_2 = -1$ sehingga solusi umum untuk persamaan homogennya:

   $$y(t) = C_1 e^{4t} + C_2 e^{-t}$$

Mencari y_p dengan melihat pada tabel (1) dan di dapatkan y_p untuk $3e^{2t}$ yaitu:

$$Y_p = Ae^{kt}$$

$$Y_p = Ae^{2t}$$

$$Y'_p = 2Ae^{2t}$$

$$Y''_p = 4Ae^{kt}$$

Dengan mensubstitusi y_p ke persamaan $y''-3y-4y=3e^{2t}$ didapatkan:

$$y''-3\,\mathrm{y}'-4\,\mathrm{y}=3\mathrm{e}^{2t}$$

$$4Ae^{kt}-3(2Ae^{2t})-4(Ae^{2t})=3\mathrm{e}^{2t}$$

$$4Ae^{kt}-6Ae^{2t}-4Ae^{2t}=3\mathrm{e}^{2t}$$

$$-6Ae^{2t}=3\mathrm{e}^{2t}$$

$$-6A=3$$

$$A=-\frac{1}{2}$$

Selanjutnya mensubtitusi A ke $y_p = Ae^{2t}$ sehingga $y_p = -\frac{1}{2}e^{2t}$

maka didapatkan persamaan diferensial tak homogen berikut

$$y = y_h + y_p$$

$$\boxed{y = C_1e^{4t} + C_2e^{-t} - \frac{1}{2}e^{2t}}$$

(Waluya, 2006: 57)

2. Temukan solusi kusus persamaan $y''-3y-4y=2\sin t$.

Penyelesaian:

Persamaan karakteristiknya $r^2-3r-4=2\sin t$ sehingga didapatkan faktor-faktornya $(r-4)(r+1)=0$ dengan $r_1=4$ dan $r_2=-1$ sehingga solusi umum untuk persamaan homogennya:

$$y(t)=C_1e^{4t}+C_2e^{-t}$$

Mencari y_p dengan melihat pada tabel (1) dan di dapatkan y_p untuk $2\sin t$ yaitu:

$$Y_p=A\sin t+B\cos t$$
$$Y'_p=A\cos t-B\sin t$$
$$Y''_p=-A\sin t-B\cos t$$

Dengan mensubstitusi y_p ke persamaan $y''-3y-4y=2\sin t$ didapatkan:

$$y''-3y'-4y=2\sin t$$
$$-A\sin t-B\cos t-3(A\cos t-B\sin t)-4(A\sin t+B\cos t)=2\sin t$$
$$-A\sin t-B\cos t-3A\cos t+3B\sin t-4A\sin t-4B\cos t=2\sin t$$

Dengan cara menggabungkan suku-suku yang sama antara ruas kanan da kiri sehingga didapatkan hasil

$$-A+3B-4A=2$$
$$-B-3A-4B=0$$

Dengan cara eliminasi diperoleh nilai $A=-\dfrac{5}{17}$ dan $B=\dfrac{3}{17}$

Selanjutnya mensubtitusi A ke

$$Y_p = A\sin t + B\cos t$$

$$Y_p = -\frac{5}{17}\sin t + \frac{3}{17}\cos t$$

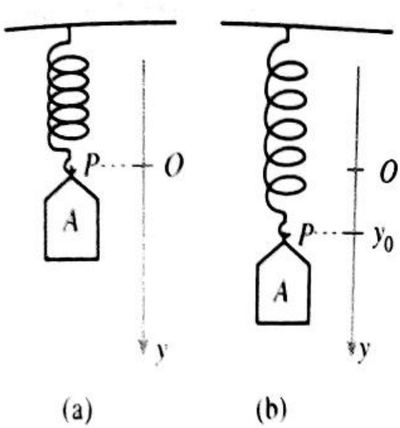
Sehingga didapatkan persamaan diferensial tak homogen berikut

$$\boxed{\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ y &= C_1 e^{4t} + C_2 e^{-t} - \frac{5}{17}\sin t + \frac{3}{17}\cos t \end{aligned}}$$

(Waluya, 2006: 58)

4. Penerapan Persamaan Diferensial Linear Biasa Orde-Kedua

a. Pegas Bergetar (Gerak Harmonik Sederhana)



Menurut hukum Hooke, gaya F cenderung untuk kembali ke posisi kesetimbangan di $y = 0$ memenuhi $F = -ky$ dimana k adalah konstanta yang bergantung pada ciri-ciri pegas tersebut dan y adalah koordinat P. Namun berdasarkan hukum kedua Newton $F = m.a = (\frac{w}{g})a$. Dimana w adalah berat benda A, a adalah percepatan dari P, dan g adalah percepatan gravitasi di bumi. Jadi,

$$\frac{w}{g}\frac{d^2y}{dt^2} = -ky \qquad k > 0$$

Yang merupakan persamaan diferensial dari gerak tersebut. Solusi y harus memenuhi syarat-sayarat awal $y(0)=y_0$ dan $y'(0)=v_0$, dimana y_0 dan v_0 masing-masing adalah posisi awal dan kecepatan awal.

Jika kita anggap $B^2 = k\frac{g}{w} = \frac{k}{m}$, maka persamaan ini berbentuk

$$\frac{d^2y}{dt^2} + B^2 y = 0$$

dan mempunyai solusi umum

$$y = C_1 \cos Bt + C_2 \sin bt$$

Syarat $y(0)=y_0$ dan $y'(0)=v_0$ pada $t=0$ menentukan konstanta C_1 dan konstanta C_2. Jika benda tersebut dilepas dengan kecepatan awal sebesar 0, maka $C_1 = y_0$ dan $C_2 = 0$. Jadi,

$$y = \mathrm{y}_0 \cos Bt$$

Sehingga pegas tersebut sedang mengalami gerak harmonik sederhana (*simple harmonic motion)* dengan amplitudo y_0 dan periode $\frac{2\pi}{B}$

(Edwin J. Purcell D. V., 2003)

Contoh Soal

1. Sebuah massa $10\,kg$ digantungkan pada sebuah pegas yang memiliki konstanta pegas $140\,N/m$. Massa tersebut digerakkan dalam kondisi setimbang dengan kecapatan awalnya $1m/s$ ke atas dan dengan diberikan gaya eksternal $F(t) = 5\sin t$ tentukanlah

pergerakan selanjutnya dari massa tersebut jika gaya hambatan udara adalah $-90\dot{x}N$

Penyelesaian:

$m = 10\,kg$

$k = 140N/m$

$a = 90$

$F(t) = 5\sin t$

Persamaan geraknya menjadi:

$10\ddot{x} + 90\dot{x} + 140x = 5\sin t$ dengan membagi persamaan tersebut dengan 10 maka dihasilkan persamaan

$\ddot{x} + 9\dot{x} + 14x = \frac{1}{2}\sin t$

Persamaan karakteristik:

$r^2 + 9r + 14 = 0$

$(\mathrm{r} + 2)(\mathrm{r} + 7) = 0$

$r_1 = -2\, dan\, r_2 = -7$

Solusi untuk persamaan homogen menjadi $\ddot{x} + 9\dot{x} + 14x = 0$ adalah

$$x_h = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-7t}$$

Dengan menggunakan koefisien tak tentu diperoleh hasil:

$$x_p = \frac{13}{500}\sin t - \frac{9}{500}\cos t$$

Sehingga solusi umumnya adalah

$$x = x_h + x_p = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-7t} + \frac{13}{500}\sin t - \frac{9}{500}\cos t$$

2. Sebuah massa $2\,kg$ digantungkan pada sebuah pegas yang memiliki konstanta pegas $10\,N/m$ dan dibiarkan sampai berhenti. Kemudian bola tersebut digerakkan dengan cara memberikannya kecepatan awal $150\,cm/s$. Tentukan ekspresi matematis untuk pergerakan massa tersebut. Jika tidak ada hambatan udara.

   Penyelesaian:

   $$m = 2kg$$
   $$k = 10N/m$$
   $$v_0 = 150cm/\mathrm{s} = 1{,}5m/s$$

   Persamaan geraknya

   $$F = -kx$$
   $$m.a = -kx$$
   $$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$
   $$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$
   $$2\frac{d^2x}{dt^2} + 10x = 0$$
   $$\frac{d^2x}{dt^2} + 5x = 0$$

   Persamaan karakteristiknya: $r^2 + 5 = 0$ dengan akar-akar murni imajiner $r = \sqrt{5}i$ sehingga didapatkan solusi umum:

$$x(t) = C_1 \sin\sqrt{5}t + C_2 \cos\sqrt{5}t$$

Untuk $x(0) = 0$

$$x(t) = C_1 \sin\sqrt{5}t + C_2 \cos\sqrt{5}t$$
$$x(0) = C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0$$
$$0 = C_2$$

Sehingga: $x(t) = C_1 \sin\sqrt{5}t$

Untuk $v_0(0) = 1{,}5\, m/s$

$$v(t) = \dot{x}(t) = \sqrt{5}C_1 \cos\sqrt{5}t$$
$$v(0) = \sqrt{5}C_1 \cos 0$$
$$1{,}5 = \sqrt{5}C_1$$
$$C_1 = \frac{1{,}5}{\sqrt{5}} = 0{,}6708$$

Sehingga

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= C_1 \sin\sqrt{5}t \\ x(t) &= 0{,}6708 \sin\sqrt{5}t \end{aligned}}$$

b. Getaran Teredam

Sejauh ini kita telah mengasumsikan sebuah situasi yang disederhanakan, dimana tidak tersapat adanya friksi (gesekan), baik didalam pegas maupun yang dihasilkan dari hambatan udara. Kita dapat memperhitungkan gesekan dengan mengasumsikan sebuah gaya pelemahan (*retarding force)* yang sebanding dengan kecepatan $\dfrac{dy}{dt}$. Maka persamaan differensial yang menggambarkan gerak akan berbentuk.

$$\frac{w}{g}\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - q\frac{dy}{dt} \qquad k > 0, q > 0$$

Dengan menetapkan $B^2 = q\frac{g}{w}$ dan $B^2 = k\frac{g}{w}$, maka persamaan ini dapat ditulis sebagai

$$\frac{d^2y}{dt^2} + E\frac{dy}{dt} + B^2y = 0$$

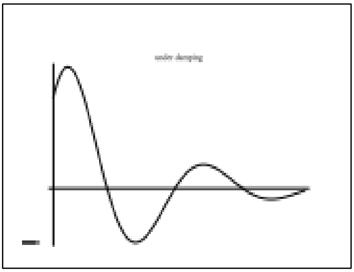
Persamaan pelengkap untuk persamaan differensial linear orde-kedua ini adalah $r^2 + Er + B^2 = 0$, sehingga akar-akarnya adalah

$$\frac{-E \pm \sqrt{E^2 - 4B^2}}{2}$$

Kita harus memperhatikan dimana $E^2 - 4B^2$ adalah negatif, nol, dan positif.

(Edwin J. Purcell D. V., 2003, hal. 405-406)

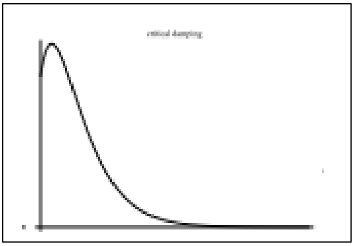
Kasus 1.



Jika $E^2 - 4B^2 < 0$ (Under Damping) mempunyai akar-akar bilangan kompleks sehingga persamaan solusinya

$$y = e^{-at}(C_1 \cos bt + C_2 \sin bt)$$

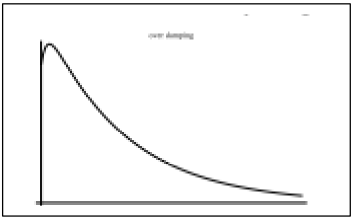
Kasus 2.



Jika $E^2 - 4B^2 = 0$ (Critical Damping) mempunyai akar-akar ganda sehingga solusi umumnya

$$y = C_1 e^{-a_1 t} + C_2 t e^{-a_2 t}$$

Kasus 3.



Jika $E^2 - 4B^2 > 0$ (over Damping) teredam berlebih mempunyai akar-akar yang negatif sehingga persamaan solusinya adalah:

$$y = C_1 e^{-a_1 t} + C_2 e^{-a_2 t}$$

(Teschl, n.d: 78.)

Contoh Soal

Ketika benda seberat $5\,pon$ digantungkan pada titik terendah P dari sebuah pegas yang menggantung secara vertikal, pegas tersebut bertambah panjang sebesar $6\,inci$. Benda sebesar $5\,pon$ tersebut diganti dengan benda seberat $20\,pon$, dan sistem tersebut dibiarkan sampai mencapai keadaan setimbang. Jika sekarang beban $20\,pon$ tersebut ditarik lagi ke bawah $2\,kaki$ dan kemudian dilepas, jelaskan gerak dari titik terendah P dari pegas tersebut jika gaya peredaman dengan $q = 0{,}2$!

Penyelesaian:

$$F = ks$$

$$5 = k(1/2)$$

$$k = 10$$

$$B^2 = k\frac{g}{w} = 10\frac{32}{20} = 16$$

$$E = q\frac{g}{w} = 0,2\frac{32}{20} = 0,32$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 0,32\frac{dy}{dt} + 16y = 0$$

Persamaan karakteristiknya $r^2 + 0{,}32r + 16 = 0$ yang mempunyai akar-akar:

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$r_{1,2} = \frac{-0,32 \pm \sqrt{0,32^2 - 4.2.16}}{2}$$

$$r_{1,2} = \frac{-0,32 \pm \sqrt{0,1024 - 128}}{2}$$

$$r_{1,2} = -0,16 \pm \sqrt{15,9744}i$$

$$r_{1,2} = -0,16 \pm 4i$$

Solusi umumnya yaitu:

$$y = e^{-0,16t}(C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4\mathrm{t})$$

Ketika menentukan syarat-syarat $y = 2$ dan $y' = 0$ di $t = 0$, kita akan menjumpai bahwa:

Untuk $y = 2$ di $t = 0$:

$$y(t) = e^{-0,16t}(C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4\mathrm{t})$$
$$y(0) = e^{0}(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0)$$
$$2 \;\; = C_1 \cos 0$$
$$C_1 = 2$$

Untuk $y' = 0$ di $t = 0$

$$y(t) = e^{-0,16t}(C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4\mathrm{t})$$
$$\mathrm{y'(0)} = -0{,}16.\mathrm{C}_1\, e^{0} \cos 0 + 4C_2 \cos 0$$
$$0 \;\; = -0{,}16.\mathrm{C}_1 + 4C_2$$
$$-0{,}16.\mathrm{C}_1 + 4C_2 = 0$$
$$-0{,}16.(2) + 4C_2 = 0$$
$$4C_2 = 0{,}32$$
$$C_2 = 0{,}08$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa:

$$\boxed{\begin{aligned} y(t) &= e^{-0,16t}(C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4\mathrm{t}) \\ y(t) &= e^{-0,16t}(2\cos 4t + 0{,}08 \sin 4\mathrm{t}) \end{aligned}}$$

c. Rangkaian Listrik

Tinjaulah rangkaian listrik pada gambar dengan sebuah resistor (R ohm), sebuah induktor (L Henry), dan sebuah kapasitor (C Farad) yang dihubungkan secara seri dengan sebuah sumber gaya elektromotif (=gaya gerak listrik, ggl) yang menyediakan tegangan $E(t)$ volt. Hukum Kirchoff menyatakan bahwa muatan Q pada kapasitor diukur dalam coulomb, akan memenuhi persamaan:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(\mathrm{t}) \qquad \text{.... (1)}$$

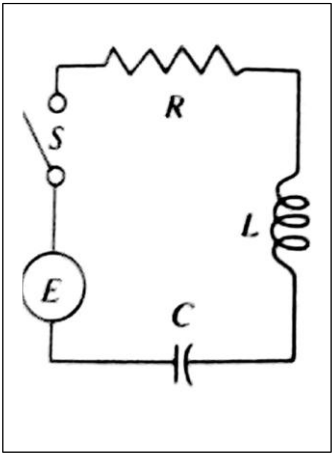
Arus $I = \frac{dQ}{dt}$ diukur dalam Ampere yang memenuhi suatu persamaan yang diperoleh dengan mendiferensialkan persamaan (1) terhadap t, yaitu:

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = E'(t)$$

Contoh Soal

Tentukan muatan Q dan arus I sebagai fungsi-fungsi dari waktu t di dalam sebuah rangkaian RLC seperti gambar. Jika $R = 16, L = 0{,}02, C = 2.10^{-4}$ dan $E = 12$. Asumsikan $Q = 0$ dan $I = 0$ di $t = 0$ (ketika saklar tertutup).

Penyelesaian:



$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

$$0,02\frac{d^2Q}{dt^2} + 16\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{2.10^{-4}}Q = 12$$

Agar $L = 1$ maka kedua ruas dikalikan dengan 50 maka dihasilkan

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 800\frac{dQ}{dt} + 250.000Q = 600$$

$$Q'' + 800Q' + 250000Q = 600$$

Yang mempunyai akar-akar berikut

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$r_{1,2} = \frac{-800 \pm \sqrt{800^2 - 4.1.250000}}{2.1}$$

$$r_{1,2} = \frac{-800 \pm \sqrt{640000 - 1000000}}{2} = -400 \pm 300i$$

Sehingga persamaan umumnya

$$\boxed{Q_h = e^{-400t}(C_1 \cos 300t + C_2 \sin 300t)}$$

Untuk menentukan solusi khusus yaitu dengan melihat tabel sehingga:

$$Q_p = C,\ Q'_p = 0,\ Q''_p = 0$$

Dengan cara subtitusi ke pers $Q''+800Q'+250000Q = 600$, maka

$$\mathrm{Q''} + 800\,\mathrm{Q'} + 250000\,\mathrm{Q} = 600$$

$$0 + 0 + 250000C = 600$$

$$250000C = 600$$

$$C = \frac{600}{250000} = 0,0024 = 2,4.10^{-3}$$

sehingga solusi khususnya adalah $Q_p = 2,4.10^{-3}$

Solusi umumnya

$$\boxed{Q = Q_h + Q_p = e^{-400t}(C_1 \cos 300t + C_2 \sin 300t) + 2,4.10^{-3}}$$

Dengan subtitusi syarat awal bahwa $Q = 0$ dan $I = 0$ di $t = 0$ maka

$Q(0) = e^0(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) + 2,4.10^{-3}$

$0 = C_1 + 2,4.10^{-3}$

$C_1 = -2,4.10^{-3}$

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d(e^{-400t}C_1 \cos 300t + e^{-400t}C_2 \sin 300t) + 2,4.10^{-3}}{dt}$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = -400C_1e^{-400t}\cos 300t - 300C_1e^{-400t} - 400C_ae^{-400t}\sin 300t + 300C_2e^{-400t}\cos 300t$$

$I(0) = -400\,\mathrm{C}_1 + 300C_2$

$-400\,\mathrm{C}_1 + 300C_2 = 0$

$-400(-2,4.10^{-3}) + 300C_2 = 0$

$300C_2 = -0,96$

$C_2 = -3,2.10^{-3}$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa

$$\boxed{\begin{aligned} &Q = (C_1e^{-400t}\cos 300t + C_2e^{-400t}\sin 300t) + 2,4.10^{-3} \\ &Q = (-2,4.10^{-3}e^{-400t}\cos 300t - 3,2.10^{-3}e^{-400t}\sin 300t) + 2,4.10^{-3} \end{aligned}}$$

(Edwin J. Purcell D. V., 2003, hal. 407)

Latihan Soal

A. Pilihan Ganda

1. Persamaan karakteristik untuk $y^{(4)} - 9y'' + 20y = 0$ adalah

   A. $r^3 - 9r^2 + 20r = 0$

   B. $r^4 - 9r^2 + 20 = 0$

   C. $r^4 - 9r^2 + 20r = 0$

   D. $r^4 - 9r^3 + 20r^2 = 0$

   E. $r^3 - 9r^2 + 20 = 0$

2. Hasil akar-akar dari persamaan $y''-7y'=0$ adalah

   A. $r_1 = 0 \; dan \; r_2 = 7$

   B. $r_1 = 0 \; dan \; r_2 = -7$

   C. $r_1 = r_2 = 7$

   D. $r_1 = r_2 = 0$

   E. $r_1 = -7 \; dan \; r_2 = 7$

3. Solusi umum dari persamaan $y''-8y'+16y=0$ adalah

   A. $y = e^{4x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$

   B. $y = C_1e^{4x} + C_2e^{4x}$

   C. $y = C_1e^{-4x} + C_2e^{4x}$

   D. $y = C_1e^{4x} + C_2xe^{4x}$

   E. $y = C_1e^{4x}\cos 4x + C_2e^{4x}\sin 4x$

4. Solusi dari persamaan $y''-4y'+4y=0$ jika $y(0)=0$ dan $y(1)=e^2$ adalah ...

   A. $y = xe^{2x}$

   B. $y = C_1e^{2x}$

   C. $y = e^{2x} + e^{3x}$

   D. $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$

   E. $y = e^{2x} + xe^{3x}$

5. Jika $y''-5y+6y=x$ solusi umum dari persamaan diferensial tak homogen tersebut adalah

A. $y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + \frac{1}{6}x - \frac{6}{30}$

B. $y(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x} + \frac{1}{6}x + \frac{5}{36}$

C. $y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + \frac{1}{6}x + \frac{5}{36}$

D. $y(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x} + \frac{1}{6}x + \frac{6}{30}$

E. $y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x} + \frac{1}{6}x + \frac{5}{36}$

6. Jika persamaan diferensial tak homogen $10\ddot{x} + 90\dot{x} + 140x = \frac{1}{2}\sin t$ akan menghasilkan nilai y_p sebesar....

   A. $x_p = \frac{9}{500}\sin t - \frac{13}{500}\cos t$

   B. $x_p = \frac{3}{25}\sin t - \frac{13}{25}\cos t$

   C. $x_p = \frac{9}{500}\sin t - \frac{13}{500}\sin t$

   D. $x_p = \frac{13}{500}\sin t - \frac{9}{500}\cos t$

   E. $x_p = \frac{500}{9}\sin t - \frac{13}{500}\cos t$

7. Jika persamaan diferensial tak homogen $y'' + y' + 8y = \sin x$ dengan syarat $y(0) = 1$ dan $y'(0) = 0$ maka solusi dari persamaan tersebut adalah ...

   A. $y = e^{-2x}\left(\frac{69}{65}\cos 2x + \frac{131}{130}\sin 2x\right)$

B. $y=\left(\frac{69}{65}\cos 2x+\frac{131}{130}\sin 2x\right)+\frac{5}{65}\sin x-\frac{4}{65}\cos x$

C. $y=\frac{5}{65}\sin x-\frac{4}{65}\cos x$

D. $y=e^{-2x}\left(\frac{69}{65}\cos 2x+\frac{131}{130}\sin 2x\right)+\frac{5}{65}\sin x-\frac{4}{65}\cos x$

E. $y=e^{-2x}\left(\frac{69}{65}\cos 2x+\frac{131}{130}\sin 2x+\frac{5}{65}\sin x-\frac{4}{65}\cos x\right)$

8. Suatu massa m bergerak bebas sepanjang sumbu x, ditarik menuju titik asal dengan gaya sebanding dengan jaraknya dari titik asal. Tentukan solusi persamaan geraknya jika gerak tersebut mulai dari diam di $x=x_0$ dan $v=0$ adalah ...

   A. $x=x_0\sin kt$

   B. $x=x_0\cos kt$

   C. $x=v_0\cos kt$

   D. $x=v_0\cos kt+x_0\sin kt$

   E. $x=x_0\cos kt+x_0\sin kt$

9. Sistem gerak harmonik benda bergantung pada pegas. Jika massa benda $m=1/4kg$ dan konstanta pegas $k=16\,N/m,$ redaman $=0$. Pegas saat tertarik benda bertambah panjang $1\,m$ dan mulai bergerak ke atas dengan kecepatan $8\,m/s$. Sistem tidak diberi gaya luar. berapaka persamaan gerak benda!

   A. $y(t)=\cos 8t+\sin 8t$

   B. $y(t)=C_1\cos 8t+C_2\sin 8t$

   C. $y(t)=e^{8t}(C_1\cos 8t-C_2\sin 8t)$

   D. $y(t)=\cos 8t-\sin 8t$

E. $y(t) = C_1 \cos 8t - C_2 \sin 8t$

10. Jika rangkaian LC dengan $L = 10\,henry, C = 0{,}004\,farad,\ E = 0\,Volt$ maka persamaan diferensial yang sesuai adalah ...
    A. $I(t) = A\cos 5t + B\sin 5t$
    B. $I(t) = -A\cos 5t + B\sin 5t$
    C. $I(t) = \cos 8t + \sin 8t$
    D. $I(t) = A\cos 5t - B\sin 5t$
    E. $I(t) = A\cos 8t + B\sin 8t$

B. Essai

1. Selesaikan persamaan $y'' - 2y' - 3y = \cos 2x$ dengan menentukan solusi umum dan solusi khusus jika $y(0) = 0$ dan $y'(0) = -1$
2. Sebuah sistem gerak benda pada pegas dengan peredaman dimodelkan oleh persamaan berikut: $\frac{d^2y}{dt^2} + d\frac{dy}{dt} + y = 0$ dengan $y(0) = 1$ dan $y'(0) = 0$. Jika $d = 1{,}4\ dan\ 2{,}3$, tentukan persamaan benda dan bagaimana pengaruh perubahan bilai konstanta peredaman d pada gerak benda!
3. Sebuah rangkaian RLC yang dihubungkan secara seri memiliki tahanan $5\,\Omega$, induktansi 0,05 henry, kapasitor 4.10^{-4} farrad, dan diberikan emf bolak-balik $200\cos 100t\ volt$. Tentukan ekspresi matematis untuk arus yang mengalir melalui rangkaian ini jika arus awal dan muatan awal pada kapasitor adalah nol!

Bagian 6 Persamaan Diferensial Parsial Orde Dua

Persamaan diferensial parsial berperan penting dalam penggambaran keadaan fisis, dimana besaran-besaran yang terlibat didalamnya berubah terhadap ruang dan waktu, contohnya mekanika klasik lanjut yang membicarakan tentang gelombang elektromagnetik, hidrodinamik dan mekanika kuantum (gelombang Schroedinger), maka akan menggunakan persamaan diferensial parsial untuk menggambarkan fenomena fisis tersebut. Penggunaan persamaan diferensial tidak terbatas pada masalah fisika saja, tetapi lebih luas lagi dalam bidang sains dan teknologi (Supardi, 2010).

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan yang memuat satu atau lebih turunan parsial dengan dua atau lebih variabel bebas. PD parsial dikatakan linier jika hanya memuat derajat pertama dari variabel-variabel bebasnya dan derivatif-derivatif parsialnya (Kusmaryanto, 2012).

1. Persamaan Umum

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G$$

Dimana:

u	=	variabel tak bebas, merupakan fungsi dari x dan y
x,y	=	variabel bebas dari persamaan diferensial
A,B,C,D,E,F,G	=	koefisien, konstanta atau merupakan fungsi dari *x* atau *y* tetapi bukan fungsi dari *u*.

2. Persamaan Fisika yang terumuskan dalam PDP

Dalam persoalan fisika banyak sekali di jumpai bahwa perubahan nilai suatu besaran dipengaruhi oleh beberapa faktor (variabel) besas, baik variabel ruang maupun waktu, beberapa contoh fisika yang terumuskan dalam PDP adalah

a. Persamaan Konduksi Panas $\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \nabla^2 u$

Disini $u(x, y, z, t)$ adalah temperatur dalam suatu benda padat pada posisi (x, y, z) pada saat *t*. Konstanta κ , dinamakan difusivitas, yang sama dengan $\kappa / \sigma\tau$ dan rapat massa (massa persatuan isi) τ diandaikan konstan.

Dalam kasus *u* tidak bergantung pada *y* dan *z*, persamaan tersebut direduksi menjadi $\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ yang dinamakan persamaan konduksi panas berdimensi satu. (Murray R.Spiegel, 1983, hal. 277)

b. Persamaan Getaran Tali $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

Persamaan ini digunakan untuk getaran transversal dari kabel, tali lentur seperti senar biola, yang asalnya diletakkan pada sumbu *x* dan tiba-tiba digerakkan. Fungsi *y(x,t)* adalah perpindahan disuatu titik

x pada tali saat t. Konstanta $a^2 = T/\mu$ dimana T adalah tegangan (konstan) dalam tali dan μ adalah massa persatuan panjang (konstan) dari tali. Di sini diandaikan bahwa tidak ada gaya luar yang bekerja pada tali, tetapi bergetar hanya karena kelenturannya.

Persamaan tersebut dapat dengan mudah diperumum untuk dimensi yang lebih tinggi seperti getaran suatu selaput atau gendering pada dimensi dua. Suatu contoh persamaan pada dimensi dua ialah

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

(Murray R.Spiegel, 1983, hal. 277)

c. Persamaan Laplace $\nabla^2 v = 0$

Persamaan ini terjadi dalam banyak hal. Dalam teori perpindahan panas, v adalah temperatur tunak *(steady-state temperature),* yaitu temperatur sesudah saat yang panjang dilalui, dan ini setara dengan mengambil $\partial u / \partial t = 0$ pada persamaan konduksi di atas. dalam teori gaya berat atau kelistrikan v berturut-turut menyatakan gaya tarik bumi atau potensial listrik. Untuk pengertian ini, persamaan tersebut seringkali dinamakan persamaan potensial (Murray R.Spiegel, 1983, hal. 277).

d. Getaran Longitudinal sebuah balok $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Persamaan ini menyatakan gerakan sebuah balok yang dapat bergetar secara longitudinal (yaitu dalam arah x). Peubah *u(x,t)* adalah perpindahan longitudinal dari keadaan setimbang irisan sejajarnya di x. Konstanta $c^2 = gE/\tau$ dimana g adalah percepatan gravitasi, E adalah modulus elastisitas [*stress* dibagi dengan *strain*] yang bergantng pada sifat batang τ adalah rapat massa (massa per satuan volume) (Murray R.Spiegel, 1983, hal. 278).

Latihan Soal
Pilihan Ganda

1. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ Karakteristik persamaan tersebut adalah…..
   A. Linear, orde 1, peubah tak bebas x
   B. Linear, orde 2, peubah tak bebas u
   C. Tidak linear, orde 1, peubah tak bebas t
   D. Tidak linear, orde 2 peubah tak bebas u
   E. Tidak linear, orde 3, peubah tak bebas t
   (Murray R.Spiegel, 1983, hal. 279)
2. $W\dfrac{\partial^2 W}{\partial r^2} = rst$ Karakteristik persamaan tersebut adalah….
   A. Linear, orde 1, peubah tak bebas r
   B. Linear, orde 2, peubah tak bebas W
   C. Linear, orde 3, peubah tak bebas s
   D. Tidak linear, orde 1, peubah tak bebas r
   E. Tidak linear, orde 2, peubah tak bebas W
   (Murray R.Spiegel, 1983, hal. 279)
3. $\left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = 1$,Karakteristk persamaan tersebut adalah….
   A. Linear, orde 1, peubah bebas u
   B. Linear orde 2, peubah bebas z
   C. Linear, orde 3, peubah bebas v
   D. Tidak linear, orde 1, peubah bebas u
   E. Tidak linear, orde 1, peubah bebas z.
   (Murray R.Spiegel, 1983, hal. 279)

4. $4\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 25\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

Penyelesaian Umum dari persamaan di atas adalah….

a. $y(x,t) = F(2x+5t) + G(2x-5t)$

b. $y(x,t) = F(2x-5t) + G(2x+3t)$

c. $y(x,t) = F(2x-6t) + G(2x-5t)$

d. $y(x,t) = F(2x-6t) + G(2x-6t)$

e. $y(x,t) = F(2x-7t) + G(2x+3t)$

(Murray R.Spiegel, 1983, hal. 280)

5. $u_{xy} = 8xy^3$ penyelesaian umum dari persamaan tersebut jika *u(x,y)* adalah fungsi dari *x* dan *y* adalah….

A. $u(x,y) = x\ y^2 + g(x) + h(y)$, dimana *g(x)* adalah fungsi dari *x* yang dapat didiferensiasikan, *h(y)* adalah fungsi dari *y* yang dapat didiferensiasikan

B. $u(x,y) = xy^4 + g(x) + h(y)$, dimana *g(x)* adalah fungsi dari *x* yang dapat didiferensiasikan, *h(y)* adalah fungsi dari *y* yang dapat didiferensiasikan

C. $u(x,y) = x^2y^2 + g(x) + h(y)$, dimana *g(x)* adalah fungsi dari *x* yang dapat didiferensiasikan, *h(y)* adalah fungsi dari *y* yang dapat didiferensiasikan

D. $u(x,y) = x^2y^4 + g(x) + h(y)$, dimana *g(x)* adalah fungsi dari *x* yang dapat didiferensiasikan, *h(y)* adalah fungsi dari *y* yang dapat didiferensiasikan.

E. $u(x,y) = x^2y^5 + g(x) + h(y)$, dimana *g(x)* adalah fungsi dari *x* yang dapat didiferensiasikan, *h(y)* adalah fungsi dari *y* yang dapat didiferensiasikan

(Richard Bronson, 2007, hal. 233)

Esai

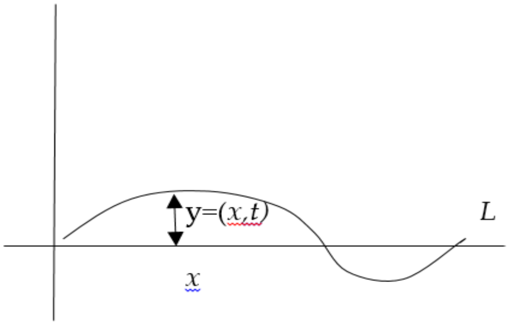
1. Tentukan penyelesaian umum dari persamaan berikut:

   a. $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

   b. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 10e^{2x+y}$

   (Murray R.Spiegel, 1983, hal. 284)

2. Perhatikan gambar beikut.



Sebuah tali yang panjangnya *L* direntangkan di antara titik (0,0) dan (*L,0*) pada sumbu x. Pada saat *t=0* bentuknya diberikan oleh $f(x),\ 0 < x < L$ dan dilepaskan dari keadaan diam. Tentukan perpindahan dari tali tersebut pada saat berikutnya.

Persamaan tali adalah:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad 0 < x < L,\ t > 0$$

Dimana y(*x,t)*=perpindahan dari sumbu x pada saat *t* (Murray R.Spiegel, 1983, hal. 287)

Glosarium

Istilah	Penjelasan
Integral	Mengenai keseluruhannya; meliputi seluruh bagian yang perlu untuk menjadikan lengkap; utuh; bulat; sempurna: masalah itu akan diselesaikan secara integral, tidak secara sebagian-sebagian.
Jari-jari	Garis lurus dari titik pusat ke keliling bulatan (lingkaran); radius.
Koordinat	Bilangan yang dipakai untuk menunjukkan lokasi suatu titik dalam garis, permukaan, atau ruang.
Kurva	Ggaris lengkung; grafik yang menggambarkan variabel (misalnya yang memperlihatkan perkembangan) yang dipengaruhi oleh keadaan; garis yang terdiri atas persambungan titik-titik.
Partisi	Dinding pemisah; sekat.
Volume	Isi atau besarnya benda dalam ruang; tingkat kenyaringan atau kekuatan (tentang bunyi, suara, dan sebagainya); banyaknya; besarnya; bobot (tentang ekspor, pekerjaan, dan sebagainya).
Integral tentu	Hasil perhitungan antiderivatif $F(x)$, di $x = a$ dan $x = b$ dan pengurangan $F(b) - F(a)$. Secara geometri, integral tertentu memberikan luas bertanda untuk bidang datar antara $f(x)$ dan sumbu x dari $x = a$ sampai $x = b$ dengan luas bidang datar di atas sumbu x bertanda positif dan luas bidang datar di bawah sumbu x bertanda negatif.

Istilah	Penjelasan
	Integral tentu dari *f(x)* antara $x = a$ dan $x = b$, dinotasikan $\int_a^b f(x)$
Gaya	Gaya, di dalam ilmu fisika, adalah interaksi apapun yang dapat menyebabkan sebuah benda bermassa mengalami perubahan gerak, baik dalam bentuk arah, maupun konstruksi geometris
Lengan beban	Jarak antara gaya beban dengan tiitik tumpu
Lengang kuasa	Jarak antara titi tumpu dengan kuasa
Massa	Suatu sifat fisika dari suatu benda yang digunakan untuk menjelaskan berbagai perilaku objek yang terpantau. Dalam kegunaan sehari-hari, massa biasanya disinonimkan dengan berat. Namun menurut pemahaman ilmiah modern, berat suatu objek diakibatkan oleh interaksi massa dengan medan gravitasi.
Momen	Hasil kali massa dan jarak berarah dari suatu titik tertentu dinamakan momen partikel (benda) terhadap titik tersebut.
Momentum	Besaran yang berhubungan dengan kecepatan dan massa suatu benda.
Pusat massa	Pusat massa ialah lokasi rerata dari semua massa yang ada di dalam suatu sistem. Dalam kasus benda tegar.
Usaha	Energi yang disalurkan gaya ke sebuah benda sehingga benda tersebut bergerak.

Istilah	Penjelasan
Asimtot	Suatu garis lurus yang didekati kurva lengkung dengan jarak semakin lama semakin kecil mendekati nol di jauh tak terhingga.
Basis	Bilangan pokok.
Eksponen	Sebuah operasi matematika, ditulis sebagai b^n, melibatkan dua bilangan, basis atau bilangan pokok b dan eksponen atau pangkat n.
Indeks	Peubahan-perubahan variabel sebuah atau lebih karakteristik pada waktu dan tempat yang sama atau berlainan.
Temperatur	Ukuran panas dinginnya dark suatu benda. Berkaitan dengan energi termis yangterkandung dalam benda tersebut. Temperatur disebut juga suhu.
Karbon	Unsur kimia yang mempunyai simbol C dan nomor atom 6, yang merupakan unsur non logam.
Radioaktif	Kumpulan beragam proses dimana sebuah inti atom yang tidak stabil memancarkan partikel subatomik(partikel radiasi)
Konstanta	Tetapan atau suatu nilai tetap; berlawanan dengan variabel yang berubah-ubah
Fungsi	Suatu relasi yang memetakan untuk setiap himpunan X hanya sekali ke himpunan Y.
Derajat	Derajat dari suatu persamaan adalah pangkat dari suku derivatif tertinggi yang muncul dalam persamaan diferensial.
Homogen	Suatu persamaan diferensial adalah homogen jika setiap suku tunggal memuat variable tak bebas atau derivatifnya. Persamaan diferensial yang tidak memenuhi definisi homogen diperhatikan sebagai tak homogen.

Istilah	Penjelasan
Orde	Turunan tertinggi dalam Persamaan Diferensial.
Penyelesaian	Suatu fungsi terdiferensial yang memenuhi persamaan diferensial dinamakan penyelesaian diferensial.
Persamaan	Persamaan menggambarkan hubungan antara variabel bebas dan tak bebas. Suatu tanda sama dengan "=" diharuskan ada dalam setiap persamaan.
Persamaan Diferensial	Persamaan yang melibatkan variable-variabel tak bebas dan derivative-detivatifnya terhadap variabel-variabel bebas dinamakan persamaan diferensial.
Persamaan Diferensial Biasa (PDB)	Persamaan diferensial yang hanya melibatkan satu variable bebas dinamakan persamaan diferensial biasa.
Persamaan Diferensial Parsial (PDP)	Persamaan diferensial yang melibatkan dua atau lebih variabel bebas dinamakan persamaan diferensial parsial.
Tingkat	Tingkat dari suatu persamaan diferensial adalah derivative tertinggi yang muncul dalam persamaan diferensial.

Daftar Pustaka

Bourne, M. (2016, Juli minggu). *Applications of Integration.* Retrieved Juli sabtu, 2017, from www.whitman.edu: https://www.whitman.edu/mathematics/calculus_online/section09.05.html

Bronson, R. (2007). *Persamaan Diferensial edisi ketiga.* Jakarta: Erlangga.

Buchanan, J. R. (2011). Applications of Integration to Physics and Engineering. In A. o. Engineering, *work, pascal* (pp. 10-43).

Dale Varberg, E. J. (2012). *kalkulus edisi sembilan.* jakarta: Gelora Aksara Pratama.

Djohan, W., & Budhi, W. S. (2007). DIKTAT KALKULUS 1. In *Penggunaan Integral* (pp. 86-90). Bandung: ITB .

Dosen, T. (2007). *Matematika Teknik II.* Jakarta Selatan: Bina Nusantara.

Edwin J. Purcell , & Dale Varberg . (1987). *Kalkulus dan Geometri Analitis* . Jakarta: Penerbit Erlangga .

Edwin J. Purcell, D. V. (2003). Kalkulus Jilid 2 Edisi Kedelapan. Jakarta: Erlangga.

Edwin J. Purcell, Dale Varberg, & Steven E. Rigdon. (2004). *Kalkulus Jilid 1.* Jakarta: Penerbit Erlangga.

Frank Ayres, & Elliot Mendelson . (2006). *Kalkulus.* Jakarta: Penerbit Erlangga.

Frank Ayres, J. P. (n.d.). Kalkulus Edisi Keempat. Penerbit Erlangga.

Harahap, I. Z. (2010). *Belajar Super Cepat Kalkulus.* jakarta: erlangga.

hunt, J.L.; Misanchuk, M.;. (2014). Designing problem-solving and laboratory content for a web-based distance education course inintroductory general physics. *University of Guelph*, 1-11.

Insani, N. (2010). Kalkukus Integral. Yogyakarta: Universtas Negeri Yogyakarta.

Kusmaryanto, S. (2012). *Persamaan Diferensial Parsial.* Malang: Univesitas Brawijaya.

Louis Leithold. (1993). *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik.* Jakarta: Penerbit Erlangga.

louis leitold, d. (1988). *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik.* jakarta: erlangga.

Martono, K. (1988). *Kalkulus Integral I.*

Murray R.Spiegel, P. (1983). *Matematika Lanjutan untuk Para Insyiur dan Ilmuwan.* Jakarta: Erlangga.

Nugroho, D. B. (2012). Kalkulus Integral dan Aplikasinya. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Nugroho, D. B. (2012). *Kalkulus Integral dan Aplikasinya.* Yogyakarta: Graha Ilmu.

Prayudi. (2006). *Matematika Teknik.* Yogyakarta: Graha Ilmu.

Purcell, E. J. (1994). Kalkulus dan Geometri Analitis. In D. Valberg. Penerbit Erlangga.

Purcell, E. J., & Varberg, D. (1998). Penggunaan Integral. In E. J. Purcell, & D. Varberg, *KALKUUS dan Geometri Analisis* (M. Drs.I Nyoman Susila, & P. Bana Karta Tasmita, Trans., kelima ed., pp. 348-359). Jakarta: ERLANGGA.

Purnomo, K. I. (n.d.). Kalkulus Integral. Semarang.

Richard Bronson, G. C. (2007). *Teori dan Soal-soal Persamaan Diferensial.* Jakarta: Erlangga.

Stewart, J. (2010). *kalkulus edisi kelima.* jakarta: salemba teknik.

Suhandi, D. A. (2009). *Fisika Matematika II. Persamaan Diferensial Parsial.* Bandung: UPI.

Suharto, I. (1992). *Matematika Terapan* . Jakarta: Rineka Cipta.

Supardi. (2010). *Persamaan Diferensial Parsial.* Yogyakarta: UNY.

Tazi, I. (2008). *Matematika untuk Sains dan Teknik.* Malang : UIN Malang Press.

Wrese, R. d. (n.d.). *Teori dan Soal-soal Kalkulus Lanjutan.*

Yahya, Y. (2013). Matematika Dasar Perguruan Tinggi. Bogor: Penerbit Ghalia Indonesia.

Profil penulis

Muhammad Minan Chusni, M.Pd.Si. Lulus S-1 di Program Studi Pendidikan Fisika Universitas Negeri Yogyakarta tahun 2009, lulus S-2 di Program Studi Magister Pendidikan Fisika Universitas Ahmad Dahlan tahun 2012, saat ini sedang melanjutkan S-3 Program Studi Pendidikan IPA Universitas Sebelas Maret.

Penulis sekarang menjadi dosen PNS di UIN Sunan Gunung Djati Bandung pada Program Studi Pendidikan Fisika sejak tahun 2015. Mata kuliah yang diampu yaitu: Kalkulus, Pengenalan Alat Ukur, Belajar dan Pembelajaran Fisika, Pengembangan Kepribadian Guru, Metodologi Penelitian, Statistika Pendidikan dan Filsafat Pendidikan. Buku yang pernah di tulis antara lain: Appy Pie untuk Edukasi: Rancang Bangun Media Pembelajaran Berbasis Android (Media Edukasi, 2018), Nilai Keislaman Pada Pembelajaran Korosi (Puslitpen UIN SGD, 2018), Statistika Pendidikan: Teori dan Aplikasi (Deepublish, 2018)

Aplikasi Kalkulus – Integral dalam Fisika

Buku yang berjudul Aplikasi Kalkulus-Integral dalam fisika ini disajikan dengan memodifikasi dari berbagai sumber buku referensi yang relevan di perguruan tinggi untuk jenjang S-1. Materi yang disajikan meliputi Integral Tentu, Usaha, Pertumbuhan/ Peluruhan Eksponensial, dan Persamaan Diferensial Linier (PDL): Orde ke-n dan Biasa Orde ke-2, Persamaan diferensial parsial orde dua. Struktur isi dari buku ajar ini diawali dengan teori umum kemudian dikaitkan dengan penerapan dalam fisika dan diakhiri dengan latihan soal mandiri dalam bentuk pilihan ganda dan esai.

PGS

Penerbit PGS
CV. Pelita Gemilang Sejahtera
Linggasari 01/03 Wanadadi
Banjarnegara 53461 Jawa Tengah
Tlpn/ WA : 08562871824

ISBN 978-602-52919-3-7

9 786025 291937